



**University of  
Zurich**<sup>UZH</sup>

**Zurich Open Repository and  
Archive**

University of Zurich  
University Library  
Strickhofstrasse 39  
CH-8057 Zurich  
[www.zora.uzh.ch](http://www.zora.uzh.ch)

---

Year: 2004

---

## Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham

Guerini, P

**Abstract:** On prescrit, pour un domaine euclidien de topologie donnée, toute partie finie du spectre du Laplacien de Hodge-de Rham, avec multiplicité 1 ou 2. Les domaines répondant à cette question ne dépendent pas du degré des formes différentielles lorsque celui-ci est compris entre 2 et  $n-1$ . De plus, on prescrit dans ce cas également le volume. On obtient un résultat similaire dans le cas des variétés compactes. La preuve s'appuie sur une généralisation aux formes différentielles des "haltères de Cheeger" ainsi que sur un résultat de convergence du spectre lorsqu'on relie ensemble des variétés par des cylindres de longueur fixée et de rayon qui tend vers 0.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ansens.2003.04.005>

Posted at the Zurich Open Repository and Archive, University of Zurich

ZORA URL: <https://doi.org/10.5167/uzh-21798>

Journal Article

Originally published at:

Guerini, P (2004). Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 37(2):270-303.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ansens.2003.04.005>

# Prescription du Spectre du Laplacien de Hodge - de Rham.

Pierre Guerini\*

## Résumé

On prescrit, pour un domaine euclidien de topologie donnée, toute partie finie du spectre du Laplacien de Hodge - de Rham, avec multiplicité 1 ou 2. Les domaines répondant à cette question ne dépendent pas du degré des formes différentielles lorsque celui-ci est compris entre 2 et  $n - 1$ . De plus, on prescrit dans ce cas également le volume. On obtient un résultat similaire dans le cas des variétés compactes. La preuve s'appuie sur une généralisation aux formes différentielles des "haltères de Cheeger" ainsi que sur un résultat de convergence du spectre lorsqu'on relie ensemble des variétés par des cylindre de longueur fixée et de rayon qui tend vers 0.

## Abstract

We prescribe, for a Euclidean domain with given topology, any finite part of the spectrum of the Hodge and de Rham Laplacian, with multiplicity 1 or 2. The domains which yield this result do not depend on the degree of the differential forms when it is between 2 and  $n - 1$ . Moreover we also prescribe the volume in this case. We get a similar result for a compact manifold. The proof relies on a generalization to differential forms of the "Cheeger's dumbbell balls" as well as on a result of convergence of the spectrum for manifolds connected together with cylinders of fixed lengths and radii which tend to 0.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Les Résultats.</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Les haltères de Cheeger généralisées.</b>	<b>4</b>
2.1	Construction de petites valeurs propres. . . . .	5
2.2	Existence de bornes inférieures uniformes. . . . .	7
2.2.1	Un lemme préparatoire. . . . .	7
2.2.2	Application : minorations indépendantes de $u$ . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Obtention de grandes valeurs propres à volume fixé.</b>	<b>15</b>

---

\*pguerini@math.unizh.ch. Institut für Mathematik, Universität Zürich-Irchel. Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich.

<b>4</b>	<b>Prescription : cas des domaines euclidiens.</b>	<b>18</b>
4.1	Existence de $\Omega_2$ .	18
4.2	Existence de $\Omega_1$ .	31
<b>5</b>	<b>Cas des variétés riemanniennes compactes.</b>	<b>34</b>
<b>A</b>	<b>Le lemme de McGowan.</b>	<b>35</b>
<b>B</b>	<b>Indications sur le lissage des ouverts.</b>	<b>35</b>
	<b>Bibliographie.</b>	<b>37</b>

## 1 Les Résultats.

Dans [CV1], Yves Colin de Verdière montre l'existence, à partir d'une suite croissante finie de nombres réels strictement positifs, d'un domaine euclidien ou d'une variété riemannienne dont le spectre pour les fonctions commence par cette suite (dans le cas des domaines, on considère le problème de Neumann puisque, pour le problème de Dirichlet, le rapport entre la deuxième et la première valeur propre est borné, en vertu de l'inégalité de Payne-Pólya-Weinberger, voir [P-P-W]).

Nous donnons dans cet articles un résultat similaire dans le cas des formes différentielles. À la différence de ce qui est fait dans [CV1], nous ne prescrivons le spectre qu'avec multiplicité 1 ou 2. Toutefois nous demeurons dans une classe de difféomorphismes donnée.

De plus, lorsque le degré des formes différentielles est compris entre 2 et  $n - 1$  (dans le cas des domaines et lorsqu'on considère les conditions de bord "absolues") ou entre 2 et  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  (dans le cas des variétés compactes), le domaine ou la métrique sont indépendants de  $p$  et l'on prescrit également le volume.

Dans le cas des fonctions, nous redonnons rapidement, sur les domaines euclidiens ou les variétés différentielles de dimension plus grande ou égale à 2 et de topologie donnée, une construction de laplaciens satisfaisant à la prescription d'une partie finie sans multiplicité de son spectre (sans prescrire le volume). Cela permet d'obtenir simplement, par différentiation, la prescription du spectre des 1-formes.

Commençons par donner le cadre général de l'étude (voir [D2] et [T]) :

Soit  $n$ , un entier plus grand ou égal à 2 et  $\Omega$ , un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  (dont le bord sera toujours lisse). Soit également  $(M, g)$ , une variété riemannienne compacte orientable sans bord de dimension  $n \geq 2$ . Le laplacien est défini par

$$\Delta = d\delta + \delta d,$$

où  $d$  est la différentielle et  $\delta = (-1)^{p(n-p)+1} \star d \star$  est la codifférentielle,  $\star$  étant l'opérateur de Hodge.

Dans le cas des domaines, les deux problèmes à bord considérés sont :

le problème relatif (R) (qui généralise le problème de Dirichlet) : 
$$\begin{cases} \Delta \omega &= \lambda \omega \\ J^* \omega &= 0 \\ J^* \delta \omega &= 0 \end{cases}$$

le problème absolu (A) (qui généralise le problème de Neumann) : 
$$\begin{cases} \Delta \omega &= \mu \omega \\ J^* i_N \omega &= 0 \\ J^* i_N d\omega &= 0 \end{cases}$$

où  $J : \partial\Omega \hookrightarrow \bar{\Omega}$  est l'inclusion canonique,  $N$  la normale extérieure au bord et  $i_N$  le produit intérieur par  $N$ .

Pour  $p \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $\mu_{k,p}(\Omega)$  (resp.  $\lambda_{k,p}(\Omega)$ ) la  $k^{ie}$  valeur propre non nulle comptée sans multiplicité du laplacien agissant sur les  $p$ -formes différentielles sur  $\Omega$  avec les conditions de bord (CB) absolues (A) (resp relatives (R)). Comme l'opérateur de Hodge échange les deux types de conditions de bord et commute avec le laplacien, pour tout  $p \in \{0, \dots, n\}$  et tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_{k,p}(\Omega) = \mu_{k,n-p}(\Omega)$ .

Notons aussi, dans le cas des variétés compactes, pour  $p \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\nu_{k,p}(M, g)$  la  $k^{ie}$  valeur propre non nulle comptée sans multiplicité du laplacien agissant sur les  $p$ -formes différentielles sur  $(M, g)$ . Ici, pour tout  $p \in \{0, \dots, n\}$  et tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\nu_{k,p}(M, g) = \nu_{k,n-p}(M, g)$ .

En vertu du théorème de Hodge, le noyau du laplacien sur les  $p$ -formes différentielles (qui, dans le cas des domaines, satisfont les CB (A) ou (R)) est canoniquement isomorphe au  $p^{ie}$  groupe de cohomologie réelle (absolue ou relative, dans le cas à bord) de la variété. Nous nous restreindrons souvent au spectre des formes différentielles *exactes*. Nous noterons alors, pour tout  $p \geq 1$ ,  $\tilde{\mu}_{k,p}(\Omega)$ , le  $k^{ie}$  valeur propre correspondante, sur  $\Omega$  (avec CB (A)) et  $\tilde{\nu}_{k,p}(M, g)$  la  $k^{ie}$  valeur propre correspondante sur  $(M, g)$ . Notons que par la décomposition de Hodge,

$$\mu_{k,p} = \inf \{ \tilde{\mu}_{k,p}, \tilde{\mu}_{k,p+1} \} \quad (1 \leq p \leq n-1), \quad \mu_{k,0} = \tilde{\mu}_{k,1}, \quad \mu_{k,n} = \tilde{\mu}_{k,n-1} \quad (1.1)$$

et

$$\nu_{k,p} = \inf \{ \tilde{\nu}_{k,p}, \tilde{\nu}_{k,p+1} \} \quad (1 \leq p \leq n-1), \quad \nu_{k,0} = \tilde{\nu}_{k,1}, \quad \nu_{k,n} = \tilde{\nu}_{k,n-1}.$$

De plus, par dualité de Hodge, pour tout  $p \in \{1, \dots, n\}$  et tout  $k \geq 1$ ,

$$\tilde{\nu}_{k,p} = \tilde{\nu}_{k,n-p+1}. \quad (1.2)$$

Énoncés des théorèmes :

**Théorème 1.1** *Soit  $\Omega$ , un domaine de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ),  $V$ , un réel strictement positif et  $K$  un entier plus grand ou égal à 1. On se donne les suites finies strictement croissantes*

1.  $(0 <) \mu_{1,0} < \dots < \mu_{K,0}$
2. *pour tout  $n \geq 3$  et  $p \in \{2, \dots, n-1\}$ ,  $(0 <) \tilde{\mu}_{1,p} < \dots < \tilde{\mu}_{K,p}$ .*

Alors :

- *Il existe un domaine  $\Omega_1$  difféomorphe à  $\Omega$  tel que pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,  $\mu_{k,0}(\Omega_1) = \mu_{k,1}(\Omega_1) = \mu_{k,0}$ .*

- Il existe un domaine  $\Omega_2$  difféomorphe à  $\Omega$ , de volume  $V$ , tel que pour tout  $p \in \{2, \dots, n-1\}$  et tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,  $\tilde{\mu}_{k,p}(\Omega_2) = \tilde{\mu}_{k,p}$ . De plus,  $\mu_{1,n}(\Omega_2) > \tilde{\mu}_{K,n-1}(\Omega_2)$ .

**Théorème 1.2** Soit  $M$ , une variété différentielle compacte connexe sans bord de dimension  $n \geq 2$ ,  $V$ , un réel strictement positif et  $K$  un entier plus grand ou égal à 1.

On se donne à nouveau des suites finies strictement croissantes

1.  $(0 <) \nu_{1,0} < \dots < \nu_{K,0}$
2. pour tout  $n \geq 4$  et  $p \in \{2, \dots, [\frac{n}{2}]\}$ ,  $(0 <) \tilde{\nu}_{1,p} < \dots < \tilde{\nu}_{K,p}$ .

Alors :

- Il existe une métrique  $g_1$  sur  $M$  telle que pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,  $\nu_{k,0}(M, g_1) = \nu_{k,1}(M, g_1) = \nu_{k,0}$  (si  $n \geq 3$ ) et  $\nu_{k,0}(M, g_1) = \nu_{2k-1,1}(M, g_1) = \nu_{2k,1}(M, g_1) = \nu_{k,0}$  (si  $n = 2$ ).
- Il existe une métrique  $g_2$  sur  $M$  de volume  $V$  telle que pour tout  $p \in \{2, \dots, [\frac{n}{2}]\}$  ( $n \geq 4$ ) et tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,  $\tilde{\nu}_{k,p}(M, g_2) = \tilde{\nu}_{k,p}$ .

**Remarque 1.3** La multiplicité des valeurs propres (ne correspondant pas nécessairement à des formes propres exactes) que l'on prescrit dans le cas des domaines euclidiens peut être, d'après le théorème 1.1 et la décomposition (1.1) librement choisie égale à 1 ou 2, lorsque  $n \geq 4$  et  $p \in \{2, \dots, n-2\}$ .

Il en est de même pour les variétés compactes lorsque  $n \geq 6$  et  $p \in \{2, \dots, [\frac{n}{2}] - 1\}$ . De plus, lorsque  $n \geq 4$  la multiplicité de  $\nu_{k, \frac{n}{2}}(M, g_2)$  est toujours 2, pour tout  $k$ .

L'existence du domaine  $\Omega_2$  (théorème 1.1) et de la métrique  $g_2$  (théorème 1.2) reposent principalement sur les constructions de la section 2 ainsi que sur un résultat dû à McGowan dans le cas des 1-formes différentielles (lemme 2.3 de [MG]) et qui se généralise aux formes différentielles de degré quelconque (voir lemme 1 de [Ge-P] ainsi que l'annexe A, pour un résumé succinct).

L'existence de  $\Omega_1$  et de  $g_1$  sera, comme on l'a dit plus haut, une reformulation de la preuve originale de Colin de Verdière, via une estimation de l'asymptotique des petites valeurs propres qui apparaissent lorsqu'on relie des domaines ou des variétés par des anses de petit rayon (voir [A2]). On montre que l'on prescrit ainsi également le spectre des 1-formes grâce à une nouvelle application du lemme de McGowan.

## 2 Les haltères de Cheeger généralisées.

Cette section présente la généralisation aux formes différentielles des haltères de Cheeger. Nous y démontrons les deux théorèmes suivants :

**Théorème 2.1** Soit un entier  $n \geq 2$ .

Pour tout  $p \in \{0, \dots, n-2\}$  il existe une famille  $(\Omega_{p,u})_{u \in ]0,1/10]}$  de domaines de  $\mathbb{R}^n$ , difféomorphes à des boules, de diamètre majoré indépendamment de  $u$ , telle que

$\lim_{u \rightarrow 0} \tilde{\mu}_{1,p+1}(\Omega_{p,u}) = 0$ . De plus, il existe une constante  $K(n)$  strictement positive et indépendante de  $u$  telle que pour tout  $u$  et tout  $q \neq p$ ,  $\tilde{\mu}_{2,p+1}(\Omega_{p,u}) \geq K(n)$  et  $\tilde{\mu}_{1,q}(\Omega_{p,u}) \geq K(n)$ .

Grâce au théorème de Hodge, nous obtenons alors facilement :

**Conséquence 2.2** *Les inégalités de Faber-Krahn et de monotonie (voir [Be]) ou de Payne-Pólya-Weinberger (voir [P-P-W] et [AB]) ne sont vérifiées pour le problème relatif sur les domaines euclidiens que dans le cas des fonctions.*

**Théorème 2.3** *Soit un entier  $n \geq 2$ .*

*Pour tout  $p \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$  il existe une famille  $(S^n, g_{p,u})_{u \in ]0, 1/10]}$  d'hypersurfaces de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , difféomorphes à la sphère  $S^n$ , de diamètre majoré indépendamment de  $u$ , telle que :*

1.  $\tilde{\nu}_{1,p}(S^n, g_{p,u}) = \tilde{\nu}_{1,n-p+1}(S^n, g_{p,u}) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$ ,
2.  $\tilde{\nu}_{2,p}(S^n, g_{p,u}) = \tilde{\nu}_{2,n-p+1}(S^n, g_{p,u}) \geq K(n)$  et si  $q \neq p, n-p+1$ ,  $\tilde{\nu}_{1,q}(S^n, g_{p,u}) \geq K(n)$ , où  $K(n)$  est une constante strictement positive indépendante de  $u$ .

## 2.1 Construction de petites valeurs propres.

Nous effectuons dans cette section la construction des domaines  $\Omega_{p,u}$  et des métriques  $g_{p,u}$  sur  $S^n$ .

**L'haltère de Cheeger généralisée** ( $n \geq 3, 1 \leq p \leq n-2$ ).

La petite valeur propre sur l'haltère de Cheeger classique provient de la fonction harmonique (1,-1) sur la réunion de deux boules (cette réunion n'étant rien d'autre qu'un voisinage tubulaire de la sphère de dimension 0). Lorsqu'on réunit ces deux boules par un cylindre, cette fonction harmonique donne lieu à une fonction test orthogonale aux constantes et associée à un petit quotient de Rayleigh. C'est en suivant cette idée qu'on effectue notre construction.

Soit la sphère  $S^p$  contenue dans  $\mathbb{R}^{p+1} \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{n-p-1}$ .

Soit également, pour  $u \leq 1/10$ ,  $O_1^p(u)$ , l'ouvert de  $\mathbb{R}^{n-p}$  obtenu comme réunion de la boule euclidienne  $B^{n-p}(0, 1/5)$  avec le cylindre  $]0, 2/5[ \times B^{n-p-1}(0, u)$  (de sorte que l'axe du cylindre passe par le centre de la boule). On lisse  $O_1^p(u)$  comme indiqué en annexe B afin d'obtenir un domaine encore noté  $O_1^p(u)$ .

On forme alors le domaine  $U_1^p(u)$  de  $\mathbb{R}^n$ , difféomorphe à un voisinage tubulaire de  $S^p$ , en plongeant dans  $\mathbb{R}^n$  le produit de  $S^p$  par  $O_1^p(u)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^p : \quad S^p \times \mathbb{R}^{n-p} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, a\nu + a_{p+2}e_{p+2} + \dots + a_n e_n) &\rightarrow aN(x) + a_{p+2}E_{p+2}(x) + \dots + a_n E_n(x), \end{aligned}$$

où  $(N, E_{p+2}, \dots, E_n)$  est un repère orthonormé mobile le long de  $S^p$ , de l'orthogonal de  $S^p$  dans  $\mathbb{R}^n$  ( $N(x)$  étant le vecteur orthogonal rentrant à  $S^p$  dans  $\mathbb{R}^{p+1}$  au point  $x$ ) et  $(\nu, e_{p+2}, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^{n-p}$  ( $\nu$  étant un vecteur directeur de l'axe du cylindre de  $O_1^p(u)$ ) : voir figure 1 (où  $n = 3$  et  $p = 1$ ).

L'ouvert  $U_1^p(u)$  n'est pas une boule topologique de  $\mathbb{R}^n$  (il possède les mêmes groupes de cohomologie absolue que la sphère  $S^p$ ).

Afin d'obtenir une boule topologique on en fait la réunion avec l'ouvert convexe  $B^{p+1}(0, 1) \times B^{n-p-1}(0, u)$ . Lorsque  $p = 0$ , cet ouvert correspond au cylindre de petit rayon qui relie les deux boules extrémales de l'haltère de Cheeger classique. Soit  $\Omega_{p,u}$ , le domaine obtenu

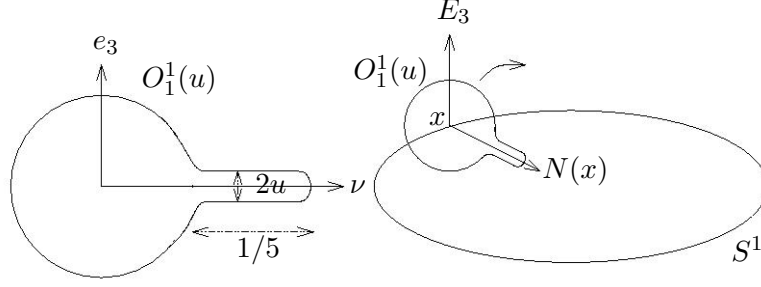


FIG. 1 –  $O_1^1(u)$  et  $U_1^1(u)$  ( $n = 3, p = 1$ )

par lissage de ce voisinage.

La boule que l'on a alors est un voisinage dans  $\mathbb{R}^n$  du disque de dimension  $p + 1$  inclus dans  $\mathbb{R}^{p+1} = \mathbb{R}^{p+1} \times \{0\}^{n-p-1}$ ; il est obtenu par déformation d'une boule euclidienne que l'on rend "épaisse" près du bord  $S^p$  et "fine" plus loin. Nous appellerons partie "épaisse" l'ouvert  $U_1^p(u)$  et partie "fine" l'ouvert  $B^{p+1}(4/5) \times B^{n-p-1}(0, u)$ .

Nous allons commencer par prouver que les boules  $\Omega_{p,u}$  possèdent une petite valeur propre pour les  $(p - 1)$ -formes.

**Notation 2.4** Désignons par  $\chi_\eta$  ( $\eta \ll 1$ ), la fonction définie par (cf [Cou], proposition 1.3.1) :

$$\chi_\eta(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq r \leq \eta \\ \frac{-2}{\ln \eta} (\ln r - \ln \eta) & \text{si } \eta \leq r \leq \sqrt{\eta} \\ 1 & \text{si } r \geq \sqrt{\eta}. \end{cases}$$

#### Début de la preuve du théorème 2.1 (existence de petites valeurs propres).

Nous montrons ici que pour tout  $n \geq 3$  et  $p \in \{1, \dots, n - 2\}$ ,  $\lim_{u \rightarrow 0} \mu_{1,p}(\Omega_{p,u}) = 0$  (le cas  $n \geq 2, p = 0$  est classique).

Soit  $W_p$ , le domaine  $\mathcal{I}_1^p(S^p \times B^{n-p}(0, 1/5))$ . Nous avons  $H_p(W_p) \simeq H_p(S^p) \simeq \mathbb{R}$ . Soit  $\Sigma_p$  la sphère  $\partial W_p \cap B^{p+1}(0, 1)$  et  $U_{p,u}$  le  $2\sqrt{u}$ -voisinage tubulaire dans  $\mathbb{R}^n$  de  $\Sigma_p$ .

Soit l'application :

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{4u} : \Omega_{p,u} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \chi_{4u}(\text{dist}(x, \Sigma_p)) \quad \text{si } x \in U_{p,u} \\ x &\mapsto 1 \quad \text{si } x \in W_p \setminus U_{p,u} \\ x &\mapsto 0 \quad \text{si } x \in \Omega_{p,u} \setminus (W_p \cup U_{p,u}), \end{aligned}$$

où la fonction  $\chi_{4u}$  a été définie en 2.4. Posons  $\omega_{p,u} = \tilde{\chi}_{4u} \omega_p$ . Cette forme test est lisse, nulle sur la partie fine de  $\Omega_{p,u}$  et vérifie les CB (A) à l'ordre 0.

Comme la codimension dans  $\mathbb{R}^n$  de  $\Sigma_p$  est  $n - p \geq 2$ , le quotient de Rayleigh de la forme test tend vers 0 avec  $u$ .

Mais  $\Omega_{p,u}$  est diffeomorphe à une boule et ne possède donc pas de cohomologie absolue en degré  $p \geq 1$ . On applique alors le principe du Min/Max. ■

Étudions à présent le cas des hypersurfaces compactes :

**Preuve du théorème 2.3 (première partie).** Soit pour tout  $n \geq 2$   $g_{p,u}$  la métrique induite par  $\mathbb{R}^{n+1}$  sur le bord du domaine  $\Omega_{p-1,u} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  construit plus haut. Comme  $\Omega_{p-1,u}$  est difféomorphe à une boule, nous obtenons ainsi des métriques sur des hypersurfaces de  $\mathbb{R}^{n+1}$  qui sont difféomorphes à des sphères.

Les hypersurfaces  $\partial\Omega_{0,u}$  ne sont autres que la réunion de deux sphères par un cylindre de petit rayon (haltères de Cheeger compactes). Le cas  $p = 1$  (ainsi que  $p = 2$  lorsque  $n = 2$ ) est donc entièrement résolu par [A1].

Lorsque  $n \geq 3$  l'hypersurface  $\partial\Omega_{p-1,u}$  est constituée de l'image par l'application  $\mathcal{I}_1^{p-1}$ , définie cette fois-ci sur  $S^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-p+2}$ , du produit  $S^{p-1} \times S^{n-p+1}$  (partie "épaisse"), recollée avec  $B^p \times S^{n-p+1}(u)$  (partie "fine",  $S^{n-p+1}(u)$  est la sphère de dimension  $n - p$  et de rayon  $u$ ).

Comme dans le cas des domaines, on obtient une petite valeur propre pour les  $(p - 1)$ -formes en prolongeant par 0 une  $(p - 1)$ -forme harmonique sur  $\mathcal{I}_1^p(S^{p-1} \times S^{n-p+1})$ . Le reste de la preuve de 2.3 (et en particulier le fait que les petites valeurs propres que l'on vient de construire sont en fait associées à des formes propres coexactes) sera traité en section 2.2.2. ■

**Remarque 2.5** *Nous ne savons pas encore, à ce stade des démonstrations, si les petites valeurs propres que l'on a construites ici sont associées à des formes propres exactes ou coexactes. Ce sera en particulier l'objet de la section suivante.*

## 2.2 Existence de bornes inférieures uniformes.

Le but de cette section est d'étudier plus précisément le spectre des formes exactes des boules et des sphères que nous avons construites. Il s'agit de compléter la preuve des théorèmes 2.1 et 2.3 en donnant des minoration indépendantes du paramètre  $u$ .

Nous établirons en particulier que les petites valeurs propres construites dans la preuve précédente ne peuvent pas être associées à des formes exactes ce qui permettra, par différentiation des formes propres, d'obtenir les petites valeurs propres annoncées.

L'outil fondamental à cette fin est le lemme de McGowan que nous présentons en annexe A. Tandis que les petites valeurs propres sont liées à l'existence d'une  $p$ -forme harmonique sur la sphère de dimension  $p$ , ce lemme de McGowan permettra précisément de limiter le nombre de petites valeurs propres en fonction de la dimension des espaces de cohomologie réelle de  $S^p$ . Le fait que  $\dim(H^0(S^p))$  soit toujours 1 si  $p > 0$  ou 2 si  $p = 0$  nous obligera à traiter à part le cas des fonctions et des 1-formes.

### 2.2.1 Un lemme préparatoire.

**Notation 2.6** *Nous poserons, pour  $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$ ,  $V_1^p(u) = \partial U_1^{p-1}(u) \cap \partial\Omega_{p-1,u}$  où, dans ce cas,  $U_1^{p-1}(u)$  et  $\Omega_{p-1,u}$  sont des domaines de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

Le but principal de cette section 2.2.1 est de minorer indépendamment de  $u$  la première valeur propre pour les  $k$ -formes exactes (A),  $k \in \{1, \dots, n\}$ , des ouverts  $U_1^p(u)$  définis en section 2.1, ainsi que des variétés à bord  $V_1^p(u)$ . Ce sera l'objet du lemme 2.7 suivant :



**Lemme 2.7** *Il existe une constante  $K > 0$  qui ne dépend ni de  $p \in \{1, \dots, n-2\}$  ( $n \geq 3$ ), ni de  $k \in \{0, \dots, n\}$ , ni de  $u \leq 1/10$  telle que pour tous  $k, p$  et  $u$ ,*

$$\tilde{\mu}_{1,k}(U_1^p(u)) \geq K.$$

*Il existe une constante  $K' > 0$  qui ne dépend ni de  $p \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ , ni de  $k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ , ni de  $u \leq 1/10$  telle que pour tous  $k, p$  et  $u$ ,*

$$\tilde{\mu}_{1,k}(V_1^p(u)) \geq K.$$

Commençons par étudier la première valeur propre pour les fonctions vérifiant les conditions de Neumann sur

- une boule euclidienne de  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 2$  à laquelle on a rajouté un cylindre de section petite et de longueur fixée.
- une sphère privée d'une petite boule et de métrique produit au voisinage de cette boule.

On se donne une boule euclidienne de rayon  $1/5$  à laquelle est recollée, de manière à obtenir un ouvert à bord lisse, un domaine cylindrique de longueur  $1/5$  et de rayon  $u$  ( $\leq 1/10$ ) (notons que les domaines  $O_1^p(u)$  sont de ce type).

Notons, pour tout  $u$ ,  $\Omega^u$  ce domaine et  $(d)$ , l'axe du cylindre.

En recollant suivant la tranche du cylindre deux copies de  $\Omega^u$ , on obtient une haltère de Cheeger du type  $\Omega_{0,u}$  dans  $\mathbb{R}^m$  (cf section 2.1).

Ce domaine possède un hyperplan de symétrie (l'hyperplan de recollement). Notons  $s_0$ , la symétrie correspondante.

Afin d'étudier le cas compact, nous considérerons aussi la variété à bord de dimension  $m$   $\mathcal{S}^u = \partial\Omega_{0,u} \cap \partial\Omega^u$  ( $\Omega_{0,u}$  est dans ce cas un domaine de  $\mathbb{R}^{m+1}$ ).

Le lemme suivant est une conséquence directe de [A1] et [A2] :

**Lemme 2.8** *Il existe une constante  $A(m) > 0$  qui ne dépend que de  $m$ , telle que pour tout  $u$ ,  $\tilde{\mu}_{2,1}(\Omega_{0,u}) \geq A(m)$  et  $\tilde{\nu}_{2,1}(\partial\Omega_{0,u}) \geq A(m)$ .*

Montrons alors le résultat suivant :

**Proposition 2.9** *Pour tout  $u$ ,  $\tilde{\mu}_{1,1}(\Omega^u) \geq A(m)$  et  $\tilde{\mu}_{1,1}(\mathcal{S}^u) \geq A(m)$ .*

**Preuve.** Comme on l'a vu dans la preuve de la première partie du théorème 2.1, il existe une fonction  $\omega_{0,u}$  sur  $\Omega_{0,u}$ , antisymétrique (sous l'action de  $s_0$ ) et telle que  $\lim_{u \rightarrow 0} \mathcal{R}(\omega_{0,u}) = 0$ . Soit  $u_0$  tel que pour tout  $u \leq u_0$ ,  $\mathcal{R}(\omega_{0,u}) \leq A(m)/2$ . On raisonne alors par l'absurde en supposant qu'il existe une valeur de  $u \leq u_0$  telle que  $\tilde{\mu}_{2,1}(\Omega^u) = \mu_{2,0}(\Omega^u) \leq A(m)/2$ . Soit  $f_u$ , une fonction propre non nulle correspondante :  $\Delta f_u = \mu_{2,0}(\Omega^u) f_u$ ,  $f_u$  satisfait aux conditions de bord (N) et  $f_u$  est orthogonale aux fonctions constantes.

Notons  $g_u$ , la fonction sur  $\Omega_{0,u}$  obtenue par symétrisation de  $f_u$ .

Cette fonction est orthogonale aux fonction constantes ainsi qu'aux fonctions antisymétriques. De plus, elle est  $C^1$  sur  $\Omega_{0,u}$  et vérifie l'équation  $\Delta g_u = \mu_{2,0}(\Omega^u) g_u$  presque partout sur  $\Omega_{0,u}$ .

Par conséquent, les fonctions  $\omega_{0,u}$ ,  $g_u$  et la fonction constante 1 sont deux à deux orthogonales et sont des fonctions-test sur  $\Omega_{0,u}$  associées à des quotients de Rayleigh plus petits que  $A(m)/2$ . Cela contredit le fait que  $\Omega_{0,u}$  ne possède que deux valeurs propres strictement plus petites que  $A(m)$ .

La minoration de  $\mu_{1,0}(\mathcal{S}^u)$  se fait de même. ■

Considérons à présent un domaine quelconque de dimension  $m \geq 2$  auquel on rattache un domaine cylindrique de longueur  $l > 0$  fixée et de rayon  $u$  qui tend vers 0, ou une variété riemannienne de dimension  $m$  dont on excise une petite boule puis dont on modifie la métrique au voisinage du bord afin d'obtenir la métrique produit  $]0, l[ \times S^{m-1}(u)$ .

Nous allons donner des minoration utiles pour la suite de certaines valeurs propres du spectre des formes exactes de ces variétés.

Nous avons ici besoin d'explicitier un peu la construction de ces ensembles.

Soit  $\Omega$ , un domaine de  $\mathbb{R}^m$ . On déforme le bord de  $\Omega$  au voisinage d'un point  $x$  du bord de sorte qu'il existe  $u_e > 0$  tel que les courbures principales soient toutes nulles dans un  $2u_e$ -voisinage de  $x$ .

Quitte à réduire  $u_e$ , on peut supposer que  $\Omega$  contient une moitié de la boule euclidienne de centre  $x$  et de rayon  $u_e$ . Nous noterons encore  $\Omega$  ce nouveau domaine. On peut alors recoller un domaine cylindrique de longueur  $l > 0$  et de rayon  $u \leq u_e$  (l'axe du cylindre étant orthogonal en  $x$  à  $\partial\Omega$ ). Notons  $\Omega^{u,l}$  le domaine, difféomorphe à  $\Omega$ , obtenu par cette construction.

Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne de dimension  $m$ , on modifie la métrique afin que celle-ci soit euclidienne sur un  $2u_e$ -voisinage d'un point. On excise alors une boule de rayon  $u/2$  ( $u \leq u_e$ ). Notons  $(M^u, g)$ , la variété à bord que l'on obtient ainsi. On modifie ensuite la métrique (afin d'obtenir une métrique lisse) au voisinage du bord afin d'obtenir la métrique produit  $]0, l[ \times S^{m-1}(u)$ . Notons  $(M^{u,l}, g^{u,l})$ , la variété riemannienne à bord ainsi obtenue.

**Proposition 2.10** *Il existe trois constantes  $a_1, a_2, a_3$  strictement positives qui ne dépendent que de  $m$  telles que pour tout  $p \geq 2$  et tout  $u \leq u_e/4$ ,*

$$\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega^{u,l}) \geq \frac{a_1}{\frac{a_2}{\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega)} + a_3 u^2}$$

*et pour tout  $p \in \{2, \dots, m-1\}$  (si  $m \geq 3$ ) et tout  $u \leq u_e/4$ ,*

$$\tilde{\mu}_{1,p}(M^{u,l}, g^{u,l}) \geq \frac{a_1}{\frac{a_2}{\tilde{\mu}_{1,p}(M,g)} + a_3 u^2}.$$

**Preuve.** Commençons par l'étude des domaines euclidiens. Considérons le recouvrement de  $\Omega^{u,l}$  schématisé en figure 2 :

Le domaine  $\Omega^{u,l,1}$  est le domaine  $\Omega$  ; le domaine  $\Omega^{u,l,2}$  s'obtient de la manière suivante :

On se donne une demi-boule de rayon 1 à laquelle est rattachée (de façon lisse) un cylindre

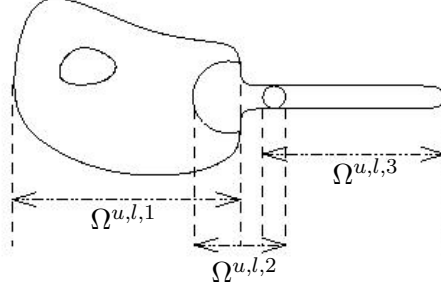


FIG. 2 – Recouvrement de  $\Omega^{u,l}$

de rayon  $1/4$  et de longueur  $1/4$ . L'ouvert  $\Omega^{u,l,2}$  est alors l'image de ce domaine par l'homothétie de rapport  $4u$  (on suppose, sans nuire à la généralité, que  $u \leq u_e/4$ ). Le petit cylindre de longueur  $u$  et de rayon  $u$  dont est muni  $\Omega^{u,l,2}$  est contenue dans le cylindre de  $\Omega^{u,l}$ . Le domaine  $\Omega^{u,l,3}$  est un domaine de bord cylindrique de longueur  $l - u$ ; c'est donc un convexe de diamètre  $\leq 2l$ . Enfin,  $\Omega^{u,l,12} = \Omega^{u,l,1} \cap \Omega^{u,l,2}$  et  $\Omega^{u,l,23} = \Omega^{u,l,2} \cap \Omega^{u,l,3}$  sont des convexes de diamètre majoré par  $2u$ .

- Comme  $\Omega^{u,l,1}$  est indépendant de  $u$ , ses valeurs propres le sont aussi.
- Par définition de  $\Omega^{u,l,2}$ , il existe une constante  $K_2 > 0$  qui ne dépend que de  $m$  telle que les valeurs propres non nulles de  $\Omega^{u,l,2}$  soient toutes minorées par  $\frac{K_2}{u^2}$ .
- D'après le lemme 3.3 et la remarque 3.5, les premières valeurs propres non nulles de  $\Omega^{u,l,3}$  sont minorées par  $\frac{K_3}{u^2}$  où  $K_3$  est une constante positive non nulle qui ne dépend que de  $m$ .
- Afin d'estimer le spectre de  $\Omega^{u,l,12}$  et de  $\Omega^{u,l,23}$ , on utilise le théorème suivant (cf. théorème 1.3 Introduction et énoncé des résultats thm.1.3 de [G2]) :

**Théorème 2.11** *Soit  $\Omega$  un domaine convexe  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) de diamètre  $d(\Omega)$ . Il existe une constante  $C_1 := C_1(n) > 0$  telle que pour tout  $p \in \{0, \dots, n\}$*

$$\mu_{1,p}(\Omega) \geq \frac{C_1}{d(\Omega)^2}.$$

Il s'ensuit que les valeurs propres non nulles de  $\Omega^{u,l,12}$  et de  $\Omega^{u,l,23}$  sont minorées par  $\frac{K_{inter}}{u^2}$ , où  $K_{inter} > 0$  est une constante indépendante de  $u$ .

Comme  $H^{p-1}(\Omega^{u,l,12}) = H^{p-1}(\Omega^{u,l,23}) \setminus \{0\}$  si  $p \geq 2$ , le lemme de McGowan permet alors d'affirmer l'existence de trois constantes  $a_1, a_2, a_3$  strictement positives qui ne dépendent que de  $m$ , telles que pour tout  $p \geq 2$  et tout  $u \leq u_e/4$ ,

$$\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega^{u,l}) \geq \frac{a_1}{\frac{a_2}{\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega)} + a_3 u^2}.$$

Étudions alors  $(M^{u,l}, g^{u,l})$  :

Choisissons le recouvrement suivant de  $M^{u,l}$  :

L'ouvert  $M_1^{u,l}$  est la variété  $M^{u,l}$  privée du cylindre  $[2u, l] \times S^{m-1}(u)$ .

L'ouvert  $M_2^{u,l}$  est le cylindre  $]u, l[ \times S^{m-1}(u)$ .

L'intersection  $M_{12}^{u,l} = M_1^{u,l} \cap M_2^{u,l}$  est alors le cylindre  $]u, 2u[ \times S^{m-1}(u)$ .

Alors :

- la variété  $M_1^{u,l}$ , munie de la métrique induite par  $g^{u,l}$  est quasi-isométrique (avec des constantes indépendantes de  $u$ ) à la variété  $(M^u, g)$ . D'après la proposition 3.3 de [D1] et le résultat de convergence de [A-C1], les valeurs propres exactes (A) pour les  $p$ -formes sur  $(M_1^{u,l}, g^{u,l})$  ( $p < m$ ) sont uniformément minorées par rapport à  $u$  par une constante strictement positive.
- Il est immédiat que le spectre exact (A) de  $(M_2^{u,l}, g^{u,l})$  est uniformément minoré par rapport à  $u$ .
- De même les valeurs propres exactes (A) de  $(M_{12}^{u,l}, g^{u,l})$  sont plus grandes que  $\frac{K'_{inter}}{u^2}$ , où  $K'_{inter} > 0$  ne dépend pas de  $u$ .

On conclut par le lemme de McGowan, sachant que  $H^{p-1}(]u, 2u[ \times S^{m-1}(u))$  est nul si  $2 \leq p \leq m-1$ . ■

Nous allons à présent établir le lemme 2.7 annoncé en début de section. Ce résultat sera fondamental dans la preuve du lemme 2.13.

**Preuve du lemme 2.7.** 1) Étude de  $U_1^p(u)$ .

Première étape : L'application  $\mathcal{I}_1^p$  de la section 2.1, qui permet de définir l'ouvert  $U_1^p(u)$ , est une quasi-isométrie entre le produit  $O_1^p(u) \times S^p$  et  $U_1^p(u)$ . Les constantes de cette quasi-isométrie sont indépendantes de  $u$  car la distance entre  $U_1^p(u)$  et le centre 0 ne dépend pas de  $u$ . Ainsi, par la proposition 3.3 de [D1] (contrôle du spectre par quasi-isométries) il suffit, pour montrer le lemme, de minorer les premières valeurs propres non nulles du spectre des formes exactes (avec conditions de bord absolues) de  $O_1^p(u) \times S^p$ .

Deuxième étape : Par la formule donnant le spectre d'un produit, il suffit de minorer les premières valeurs propres exactes absolues de  $O_1^p(u)$ .

1. Minoration de  $\tilde{\mu}_{1,1}(O_1^p(u))$ .  
Minorer  $\tilde{\mu}_{1,1}(O_1^p(u))$  signifie minorer  $\mu_{1,0}(O_1^p(u))$ . Mais cela provient de la proposition 2.9.
2. Minoration de  $\tilde{\mu}_{1,n-p}(O_1^p(u))$ .  
Elle provient du théorème de Faber-Krahn ( $O_1^p(u)$  est un domaine de  $\mathbb{R}^{n-p}$ ).
3. Minoration de  $\tilde{\mu}_{1,k}(O_1^p(u))$ ,  $k \in \{2, \dots, n-p-1\}$ .  
C'est une conséquence directe de la proposition 2.10 (avec  $m = n-p$  et  $l = 1/5$ ).

2) Étude de  $V_1^p(u)$ .

Comme précédemment, il suffit d'étudier les valeurs propre du produit  $S^{p-1} \times \mathcal{S}^u$ , où  $\mathcal{S}^u$  a été définie plus haut et est ici de dimension  $n-p+1$ .

Le résultat provient alors des propositions 2.9 et 2.10 ainsi que de la formule donnant le spectre d'un produit. ■

### 2.2.2 Application : minoration indépendantes de $u$ .

Comme annoncé en introduction de cette section, nous nous intéressons ici aux valeurs propres des domaines  $\Omega_{p,u}$  qui ne tendent pas vers 0 avec  $u$ . Le cas des haltères de Cheeger

$\Omega_{0,u}$  est classique (voir section précédente).

Nous donnons ici des estimations du spectre des formes *exactes* (A) de  $\Omega_{p,u}$  (lemmes 2.12 et 2.13), pour  $p$  compris entre 1 et  $n-2$ . Le théorème de décomposition de Hodge permet alors de revenir au spectre non nécessairement exact.

Nous donnons ensuite le cas des  $(n-1)$ -formes (A) sur  $\Omega_{n-1,u} = \Omega_{n-2,u}$ .

Intéressons-nous à présent à la première valeur propre pour les 1-formes exactes (A) sur les domaines  $\Omega_{p,u}$  ( $0 \leq p \leq n-2$ ). Cette valeur propre demande une étude particulière. En effet, quel que soit le domaine (connexe) que l'on étudie, le lemme de McGowan (tout comme le lemme classique de minoration des valeurs propres du problème de Neumann en fonction des valeurs propres d'un recouvrement ouvert, voir corollaire 4.65 de [Ga-H-L]) permet de minorer au mieux la deuxième valeur propre pour les 1-formes exactes (A) (tout domaine connexe possédant un espace de dimension 1 de fonctions harmoniques (N)). La méthode sera donc ici d'utiliser les symétries des domaines  $\Omega_{p,u}$  afin de se ramener à des domaines que l'on a déjà étudiés.

**Lemme 2.12** *Il existe une constante positive non nulle  $C_1(n)$  qui ne dépend que de  $n \geq 3$  telle que pour tout  $p \in \{1, \dots, n-2\}$  et tout  $u \leq 1/10$ ,*

$$\tilde{\mu}_{1,1}(\Omega_{p,u}) \geq C_1(n).$$

**Preuve du lemme 2.12.** Considérons le recouvrement de  $\Omega_{p,u}$  constitué de l'ouvert  $U_1^p(u)$  étudié à la section précédente, c'est-à-dire de la partie épaisse de  $\Omega_{p,u}$  et du convexe central (partie fine)  $U_2^p(u)$ , de diamètre  $\leq 1$ .

Par le lemme 2.7, nous avons  $\mu_{1,0}(U_1^p(u)) \geq C'_1$  et, d'après le théorème 2.11,  $\mu_{1,0}(U_2^p(u)) \geq C'_1$ , où  $C'_1$  est une constante non nulle positive indépendante de  $u$ . Ainsi, le corollaire 4.65 de [Ga-H-L] donne  $\mu_{2,0}(\Omega_{p,u}) \geq C'_1$ .

Supposons que lorsque  $u$  tend vers 0,  $\mu_{1,0}(\Omega_{p,u})$  tende vers 0. Comme  $\mu_{2,0}(\Omega_{p,u})$  est uniformément minoré, la multiplicité de  $\mu_{1,0}(\Omega_{p,u})$  est, pour  $u$  assez petit, exactement 1.

Rappelons que la partie épaisse de  $\Omega_{p,u}$  a été construite à partir d'un voisinage de la sphère unité  $S^p \in \mathbb{R}^{p+1} \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{n-p-1}$ . Il s'ensuit que les domaines  $\Omega_{p,u}$  sont invariants par les éléments du groupe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-p-1} \end{pmatrix}, R \in SO(p+1, \mathbb{R}) \right\} < SO(n, \mathbb{R}).$$

Soit  $f_u$  une fonction propre non nulle pour les conditions de Neumann sur  $\Omega_{p,u}$ , associée à  $\mu_{1,0}(\Omega_{p,u})$ . Comme  $G$  est connexe,  $f_u$  est également invariante sous l'action de  $G$ .

Considérons alors le domaine  $\tilde{\Omega}_{p,u} = \Omega_{p,u} \cap P$ , où  $P$  est un hyperplan quelconque contenant  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p-1}$ . Ce domaine n'est autre qu'une copie de  $\Omega_{p-1,u}$  en dimension  $n-1$ .

Notons  $\tilde{f}_u$  la restriction de  $f_u$  à  $\tilde{\Omega}_{p,u}$ . Cette fonction est non nulle et invariante par  $\tilde{G}$ .

Or, à cause de l'invariance de  $f_u$  sous l'action de  $G$ ,  $\mathcal{R}(f_u) = \mathcal{R}(\tilde{f}_u)$  (ainsi,  $\lim_{u \rightarrow 0} \mathcal{R}(\tilde{f}_u) = 0$ )

et  $\int_{\tilde{\Omega}_{p,u}} \tilde{f}_u = 0$ .

Lorsque  $p = 1$ , on raisonne alors comme dans la preuve de la proposition 2.9 :

Il existe une constante  $A(n) > 0$  indépendante de  $u$ , telle que  $\mu_{2,0}(\tilde{\Omega}_{1,u}) \geq A(n)$ .

Mais les fonctions  $\tilde{f}_u$  (symétrique),  $\omega_{0,u}$  (antisymétrique, cf preuve du lemme 2.9) et 1 (fonction constante), sur  $\tilde{\Omega}_{1,u}$  sont deux à deux orthogonales et sont associées à des quotients de Rayleigh qui tendent vers 0 avec  $u$ , ce qui, par le principe du Min/Max, est une contradiction.

On montre alors, pour tout  $n \geq 4$ , le cas  $p \geq 2$  par récurrence. ■

Dans les lemmes suivants, on s'intéresse aux  $p$ -formes en général ( $n \geq 3$ ,  $p \in \{1, \dots, n-2\}$ ).

**Lemme 2.13** *Soit  $n \geq 3$ .*

*Il existe des constantes positives non nulles  $\tilde{C}_i(n, p)$ ,  $i = 1, 2$  qui ne dépendent pas de  $u$ , telles que :*

*pour tout  $p$  et  $q \in \{1, \dots, n-2\}$ ,  $q \neq p+1$*

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_{1,q}(\Omega_{p,u}) &\geq \tilde{C}_1(n, p) \\ \tilde{\mu}_{2,p+1}(\Omega_{p,u}) &\geq \tilde{C}_2(n, p);\end{aligned}$$

*De plus, pour tout  $p \in \{1, \dots, n-2\}$ ,*

$$\mu_{1,p}(\Omega_{p,u}) = \tilde{\mu}_{1,p+1}(\Omega_{p,u})$$

**Preuve.** Le cas  $p = 1$  vient d'être traité au lemme 2.12. La suite repose sur le lemme de McGowan. Considérons le recouvrement suivant de  $\Omega_{p,u}$  (voir schématisation en figure 3) : le premier ouvert,  $U_1^p(u)$ , est la partie "épaisse" de  $\Omega_{p,u}$ . Le second,  $U_2^p(u)$ , est le domaine convexe lissé difféomorphe au produit  $B^{p+1}(0, 1/2) \times B^{n-p-1}(0, u)$ . Enfin, l'intersection  $U_1^p(u) \cap U_2^p(u) = U_{12}^p(u)$  est un voisinage de  $S^p(7/10)$  qui se rétracte sur  $S^p(7/10)$ .

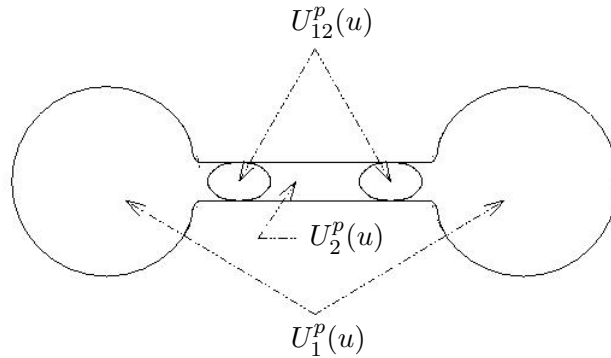


FIG. 3 – Schématisation du recouvrement de  $\Omega_{p,u}$

Nous avons :

$$\begin{aligned}H^q(U_{12}^p(u)) &= \{0\} \text{ si } q \notin \{0, p\}. \\ &= \mathbb{R} \text{ si } q \in \{0, p\}.\end{aligned}$$

- Minorants du spectre exact de  $U_1^p(u)$  :

Par le lemme 2.7, nous avons :

$$\forall q \in \{0, \dots, n\}, \tilde{\mu}_{1,q}(U_1^p(u)) \geq K,$$

où  $K$  est une constante positive non nulle indépendante de  $u$ .

- Minorants du spectre exact de  $U_{12}^p(u)$  :

Cet ouvert est l'image par la quasi-isométrie  $\mathcal{I}_1^p$  introduite en section 2.1 du produit  $C_p(u) \times S^p$  où  $C_p(u)$  est un domaine convexe de  $\mathbb{R}^{n-p}$  de diamètre  $\leq 1$ . De même que dans la preuve du lemme 2.7, les constantes de cette quasi-isométrie ne dépendent pas de  $u$ . Ainsi, d'après la proposition 3.3 de [D1], il suffit de contrôler le spectre exact absolu du produit  $C_p(u) \times S^p$  muni de la métrique canonique. Mais par le théorème 2.11, les premières valeurs propres non nulles de  $C_p(u)$  sont minorées par une constante strictement positive indépendante de  $u$ . Donc, par la formule donnant la spectre d'un produit, nous avons les minoration uniformes pour  $U_{12}^p(u)$ .

- Minorants du spectre exact de  $U_2^p(u)$  :

Cela provient à nouveau du théorème 2.11.

Les minoration données ci dessus permettent d'appliquer le lemme de McGowan :

Comme  $\dim(H^{q-1}(U_{12}^p(u))) = 0$  lorsque  $q \neq p+1$ ,  $\tilde{\mu}_{1,q}(\Omega_{p,u})$  est minorée indépendamment de  $u$  pour ces valeurs de  $q \neq p+1$ .

En particulier, pour tout  $p \in \{1, \dots, n-2\}$ , une forme propre non nulle pour  $\mu_{1,p}(\Omega_{p,u})$  ne peut être exacte puisque  $\lim_{u \rightarrow 0} \mu_{1,p}(\Omega_{p,u}) = 0$ . Ainsi,  $\mu_{1,p}(\Omega_{p,u}) \geq \tilde{\mu}_{1,p+1}(\Omega_{p,u})$ . L'inégalité inverse étant toujours vérifiée, nous obtenons :  $\mu_{1,p}(\Omega_{p,u}) = \tilde{\mu}_{1,p+1}(\Omega_{p,u})$ . Maintenant,  $\dim(H^p(U_{12}^p(u))) = 1$  pour tout  $p \in \{1, \dots, n-2\}$ ; donc le lemme de McGowan donne encore un minorant indépendant de  $u$  pour  $\tilde{\mu}_{2,p+1}(\Omega_{p,u})$ . ■

L'objet de la suite de cette section est d'étudier les valeurs propres des sphères  $(S^n, g_{p,u})$  qui ne tendent pas vers 0 avec  $u$ .

**Lemme 2.14** *Il existe une constante positive non nulle  $C_{0,1}(n)$  qui ne dépend que de  $n \geq 4$  telle que pour tout  $p \in \{2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$  et tout  $u \leq 1/10$ ,*

$$\tilde{\nu}_{1,1}(S^n, g_{p,u}) \geq C_{0,1}(n).$$

La preuve est la même que pour le lemme 2.12.

**Lemme 2.15** *Il existe une constante positive non nulle  $\tilde{C}'(n)$  qui ne dépend pas de  $u$ , telle que pour tout  $p \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$*

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{2,p}(S^n, g_{p,u}) &\geq \tilde{C}'(n), \\ \tilde{\nu}_{1,q}(S^n, g_{p,u}) &\geq \tilde{C}'(n) \text{ si } q \neq p, q \in \left\{1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}. \end{aligned}$$

**Preuve.** Le cas  $p = 1$  a déjà été traité dans la première partie de la preuve du théorème 2.3. De plus, le cas  $p \geq 2$ ,  $q = 1$  provient du lemme 2.15. Intéressons-nous au cas  $p \geq 2$ ,  $q \geq 2$ . On applique encore le lemme de McGowan à  $(S^n, g_{p,u})$  en choisissant le recouvrement donné par les deux ouverts  $V_1^p(u)$  et  $V_2^p(u) = \partial U_2^{p-1}(u) \cap \partial \Omega_{p-1,u} = B^p(0, 1/2) \times S^{n-p}(u)$  (où, ici, les domaines  $U_2^{p-1}(u)$  et  $\Omega_{p-1,u}$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). L'intersection  $V_1^p(u) \cap V_2^p(u) = V_{12}^p(u)$  a même cohomologie absolue que le produit  $S^{p-1} \times S^{n-p}$ . En particulier, si  $q \in \{2, \dots, [\frac{n}{2}]\}$ ,  $H^{q-1}(S^{p-1} \times S^{n-p})$  est isomorphe à  $\mathbb{R}$  si  $q = p$  et est nul sinon. De plus, les valeurs propres non nulles de  $V_{12}^p(u)$  sont minorées par une constante strictement positive indépendante de  $u$ . La conclusion résulte alors du lemme 2.7. ■

Les lemmes 2.13 et 2.15 complètent la preuve du théorème 2.3.

**Remarque 2.16** *Les métriques construites sur  $S^n$  au théorème 2.3 possèdent exactement une petite valeur propre pour les  $p$ -formes exactes et une petite valeur propre pour les  $(n - p + 1)$ -formes exactes. Il n'y a pas de petite valeur propre pour les autres degrés. Les deux petites valeurs propres se déduisent l'une de l'autre par dualité. Toutefois, au niveau de leur construction géométrique, leurs provenances sont différentes. La petite valeur propre  $\tilde{v}_{1,p}$  provient de la disparition des  $(p - 1)$ -formes harmoniques non nulles lors de la transformation (par chirurgie) de  $S^{p-1} \times S^{n-p+1}$  en une sphère  $S^n$ . La variété à bord intermédiaire est  $V_1^p(u)$  qui possède un espace de  $(p - 1)$ -cohomologie réelle de même dimension que celui de  $S^{p-1} \times S^{n-p+1}$  (car  $p < \frac{n+1}{2}$ ); cette variété n'a pas de petite valeur propre pour les  $p$ -formes exactes vérifiant les CB (A). En revanche, la petite valeur propre  $\tilde{v}_{1,n-p+1}$  sur  $(S^n, g_{p,u})$  apparaît déjà sur les variétés  $V_1^p(u)$  (comme petite valeur propre pour les  $(n - p + 1)$ -formes vérifiant les CB (A)). En effet, déjà lors du passage de  $S^{p-1} \times S^{n-p+1}$  à  $V_1^p(u)$ , il y a, contrairement au degré  $p - 1$ , disparition de l'espace de cohomologie en degré  $n - p + 1$ . Notons que  $V_1^p(u)$  possède également une petite valeur propre en degré  $n$  (CB (A)) provenant de la disparition des  $n$ -formes harmoniques de  $S^{p-1} \times S^{n-p+1}$  ( $H^n(V_1^p(u)) = \{0\}$ ). Cette petite valeur propre ne se retrouve pas sur  $(S^n, g_{p,u})$ ; la raison en est que  $H^n(S^n)$  est, de même que pour  $S^{p-1} \times S^{n-p+1}$ , égal à  $\mathbb{R}$ .*

### 3 Obtention de grandes valeurs propres à volume fixé.

Nous donnons ici une construction qui permettra de prescrire le volume dans nos théorèmes de prescription (sauf pour les fonctions et les 1-formes qui vérifient les CB (A)).

Nous obtenons en particulier que l'inégalité de Weinberger (voir [W]) ne donne un majorant de la première valeur propre non nulle, qui ne fait intervenir que le volume, que dans le cas des fonctions et (par différentiation des fonctions propres) des 1-formes (A).

**Théorème 3.1** *Soit un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ).*

*Soit  $A$ , un réel positif.*

*Il existe un domaine  $\Omega_A \in \mathbb{R}^n$  difféomorphe à  $\Omega$  tel que :*

- $\text{Vol}(\Omega_A) = \text{Vol}(\Omega)$ ,



– Pour tout  $p \in \{2, \dots, n\}$ ,  $\mu_{1,p}(\Omega_A) \geq A$ .

**Remarque 3.2** Une telle propriété était déjà connue pour les variétés compactes (voir [Ge-P]). Nous utiliserons d'ailleurs ce dernier résultat pour la prescription du volume dans le cas compact (sauf pour les fonctions et les 1,  $(n-1)$  et  $n$ -formes).

La première étape de la preuve consiste à estimer le spectre du produit d'un intervalle par une boule :

**Lemme 3.3** Soit, pour  $n \geq 2$ ,  $C_{n,l,r}$ , l'ouvert cylindrique  $B^{n-1}(r) \times ]-l, l[$ , où  $l$  et  $r$  sont deux réels strictement positifs.

Alors, il existe une constante  $\Lambda > 0$  indépendante de  $l$  et de  $r$  telle que pour tout  $p \in \{2, \dots, n\}$ ,  $\liminf_{l \rightarrow \infty} \mu_{1,p}(C_{n,l,r}) \geq \frac{\Lambda}{r^2}$ .

**Remarque 3.4** Notons que l'ouvert  $C_{n,l,r}$  ne possède pas un bord lisse. Toutefois, dans [Che1] et [Che2], Cheeger définit la théorie spectrale de certaines variétés singulières. Les ouverts  $C_{n,l,r}$ , qui sont convexes, entrent dans ce cadre. On peut trouver dans [D-MG], un résumé succinct de cette théorie que nous utilisons ici.

**Preuve du lemme 3.3.** Soit  $p \in \{2, \dots, n\}$ .

Soit,  $\mathcal{H}_p(B^{n-1}(r) \times ]-l, l[)$ , le sous espace vectoriel de  $L_p^2(B^{n-1}(r) \times ]-l, l[)$  engendré par les produits de  $p$ -formes propres (A) sur  $B^{n-1}(r)$  et de fonctions propres (A) sur  $] -l, l[$  ou de  $(p-1)$ -formes propres (A) sur  $B^{n-1}(r)$  et de 1-formes propres (A) sur  $] -l, l[$ .

Si  $\alpha \wedge \beta$  est un tel produit, où  $\alpha$  est associée à la valeur propre  $\mu$  et  $\beta$  à la valeur propre  $\mu'$ ,  $\alpha \wedge \beta$  se trouve dans le domaine du Laplacien (A) sur l'ouvert singulier  $B^{n-1}(r) \times ]-l, l[$  et est associée à la valeur propre  $\mu + \mu'$ .

De plus, nous avons  $\overline{\mathcal{H}_p(B^{n-1}(r) \times ]-l, l[)} = L_p^2(B^{n-1}(r) \times ]-l, l[)$ . En effet, les produits de formes lisses à support compact sont denses dans  $L_p^2(B^{n-1}(r) \times ]-l, l[)$  ; de plus, si un tel produit est orthogonal à  $\mathcal{H}_p(B^{n-1}(r) \times ]-l, l[)$ , alors il est nul.

Ainsi, comme sur un domaine de dimension  $m \geq 2$  (en fait de dimension  $m \geq 1$ ), difféomorphe à une boule, il n'y a pas de  $q$ -formes harmoniques (A) pour  $q \geq 1$ , nous avons alors, pour tout  $p \in \{2, \dots, n\}$ , la formule :

$$\mu_{1,p}(C_{n,l,r}) = \inf \{ \mu_{1,p}(B^{n-1}(r)), \mu_{1,p-1}(B^{n-1}(r)) + \mu_{1,1}(]-l, l[) \},$$

ce qui achève la preuve du lemme. ■

**Remarque 3.5** La propriété de l'ouvert-produit  $C_{n,l,r}$  donnée par le lemme 3.3 est encore vérifiée si on lisse  $C_{n,l,r}$  (voir annexe B).

On minore les valeurs propres du domaine lissé, pour  $p \geq 2$  en utilisant le lemme de McGowan et 3.3 (il suffit de prendre pour recouvrement deux ouverts indépendants de  $l$  aux extrémités de cylindre lissé, ainsi que le cylindre central non lissé).

**Remarque 3.6** Le lemme 3.3 et la remarque 3.5 montrent qu'il est possible de construire des domaines convexes de volume 1 avec des valeurs propres aussi grandes que l'ont veut. Ainsi, le théorème de Weinberger n'est pas satisfait dans le cas des formes différentielles de degré non nul (pour les CB (A)), même en se restreignant à des domaines convexes.

**Preuve du théorème 3.1(idée).** L'idée de la construction est de relier  $\Omega$  à un domaine cylindrique de rayon fixé et de grande longueur de sorte que :

- ce nouveau domaine est difféomorphe à  $\Omega$
- le volume du nouveau domaine est arbitrairement grand,
- la première valeur propre non nulle pour les  $p$ -formes  $(A)$ ,  $p \in \{2, \dots, n\}$  est minorée par une constante strictement positive indépendante de la longueur du cylindre.

Ce dernier point repose sur le lemme de McGowan et le lemme 3.3.

Une homothétie donne alors le résultat.

Nous omettrons ici les détails de la preuve (très similaire au travail de [Ge-P]). La démonstration complète se trouve dans [G1]. ■

**Remarque 3.7** *La longueur du cylindre que comporte le domaine  $\Omega_A$  est d'autant plus grande que le minorant  $A$  est grand.*

*De plus, grâce au lemme de McGowan et au lemme 3.3, il n'est pas difficile de montrer l'existence d'une constante  $C(n) > 0$  indépendante de  $A$  telle que si l'on rallonge le cylindre d'une longueur  $l \geq 0$ , les valeurs propres du domaine correspondant restent minorées par  $C(n) A$ .*

*Ceci reste valable lorsqu'il s'agit de variétés compactes.*

**Remarque 3.8** *Les théorèmes, 2.1, 2.3 et 3.1 reposent sur des phénomènes topologiques. En effet, un domaine  $\Omega$  étant donné, il possède, en degré 0, toujours de la cohomologie absolue et ne possède jamais de cohomologie relative. En revanche, on a beaucoup plus de liberté dans le cas des formes différentielles. En effet, les boules de  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 2$ ) n'ont jamais de cohomologie absolue, en degré plus grand ou égal à 1. Mais pour tout entier  $p \geq 1$ , il existe un domaine qui possède de la cohomologie relative en degré  $p$  (il suffit de choisir un voisinage tubulaire d'une sphère de dimension  $n - p$ ).*

*Le premier fait permet de montrer le théorème 3.1; le deuxième est à la base du théorème 2.1 (1). Le résultat de [Ge-P] ainsi que le théorème 2.3 reposent sur le même phénomène.*

**Remarque 3.9** *Nous construisons de grandes valeurs propres à volume 1 pour les  $(n - 1)$ -formes  $(A)$ . Mais dans [Ge-P], Gentile et Pagliara n'obtiennent de grandes valeurs propres sur les variétés compactes que pour  $2 \leq p \leq n - 2$ . Cela s'explique par le fait qu'il n'y a pas d'influence du spectre des fonctions  $(A)$  sur celui des 1-formes  $(R)$  si  $n \geq 3$  (alors que pour les variété sans bord, le spectre des fonctions se retrouve, par différentiation, sur le spectre des 1 et  $(n - 1)$ -formes).*

*De plus, dans la preuve de notre lemme 3.3, on minore la première valeur propre pour les  $(n - 1)$ -formes  $(A)$  du produit d'un long intervalle par une boule de dimension  $n - 1$ , indépendamment de la longueur de l'intervalle. Cela est possible puisque une telle boule ne possède pas de  $(n - 1)$ -formes harmoniques  $(A)$ . Mais minorer la première valeur propre non nulle pour les  $(n - 1)$ -formes  $(A)$  du produit d'un intervalle par une sphère de dimension  $n - 1$ , indépendamment de la longueur de l'intervalle, n'est pas possible puisque une telle sphère possède des  $(n - 1)$ -formes harmoniques, d'où la restriction du résultat de [Ge-P].*

**Remarque 3.10** Les domaines  $\Omega_A$  du théorème 3.1 auront un rayon interne d'autant plus petit que  $A$  sera grand. En fait, le rayon interne est un paramètre nécessaire pour conserver un contrôle par le haut des valeurs propres. Si  $\Omega$  est un domaine euclidien de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) et  $\rho$  est son rayon interne, il existe une constante  $C_n > 0$  qui ne dépend que de la dimension, telle que pour tout  $p \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\mu_{1,p}(\Omega) \leq \frac{C_n}{\rho^2}$ . La preuve est classique.

## 4 Prescription : cas des domaines euclidiens.

### 4.1 Existence de $\Omega_2$ .

#### Première étape.

Le théorème 2.1 donne (quitte à utiliser des homothéties) l'existence de domaines difféomorphes à des boules euclidiennes, de diamètre contrôlé, tels que la première valeur propres (pour les  $p$ -formes (A)) est fixée à l'avance alors que la seconde est aussi grande que l'on veut.

Nous allons obtenir ici le même résultat sur des boules topologiques auxquelles est rattachée un cylindre de petit rayon.

Plus précisément, le but de cette étape est de montrer la proposition suivante :

**Proposition 4.1** Soit trois réels  $V_0 > 0$ ,  $D_0 > 0$  et  $\alpha > 0$ .

Il existe une suite strictement décroissante  $(\epsilon_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  de réels positifs, qui tend vers 0 et, pour tout  $p \in \{2, \dots, n-1\}$  et tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ , une suite de domaines  $(\Omega_{p,k,m})_{m \in \mathbb{N}^*}$  difféomorphes à des boules, telles que pour tout  $p$ , tout  $k$  et tout  $m$  :

- $\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{p,k,m}) = \tilde{\mu}_{k,p}$ ,
- $\tilde{\mu}_{2,p}(\Omega_{p,k,m}) \geq 100 \tilde{\mu}_{K,p}$ ,
- $\tilde{\mu}_{1,q}(\Omega_{p,k,m}) \geq \alpha \tilde{\mu}_{K,p}$ , pour  $q \in \{2, \dots, n-1\} \setminus \{p\}$ ,
- $\text{Vol}(\Omega_{p,k,m}) < V_0$ ,
- $\text{diam}(\Omega_{p,k,m}) < D_0$ ,
- chaque domaine  $\Omega_{p,k,m}$  est muni d'un cylindre  $\mathcal{C}_{\epsilon_m}$  de longueur  $D_0/2$  et de rayon  $\epsilon_m$ .

**Remarque 4.2** Le réel  $\alpha$  sera déterminé dans la preuve du lemme 4.15. Ce sera une constante qui ne dépendra que de la dimension  $n$ .

On utilise ici les domaines construits dans la section 2. Considérons, pour  $p \in \{2, \dots, n-1\}$  la famille de boules topologiques  $(\Omega_{p-1,u})_{u \leq 1/10}$ . Nous récapitulons les propriétés spectrales de ces domaines dans le tableau 1.

Quitte à utiliser une homothétie de rapport convenable, on supposera que les domaines  $\Omega_{p-1,u}$  ( $p \in \{2, \dots, n-1\}$ ) ont un diamètre strictement plus petit que  $D_0/2$  et un volume strictement majoré par  $V_0/2$ .

On recolle maintenant à la partie épaisse des  $\Omega_{p-1,u}$  le domaine cylindrique  $]0, D_0[ \times B^{n-1}(\epsilon_0)$ , où  $B^{n-1}(\epsilon_0)$  désigne la boule euclidienne de dimension  $n-1$  et de rayon  $\epsilon_0 > 0$  (le réel  $\epsilon_0$  est choisi assez petit pour que, d'une part, la construction ait un sens et que, d'autre

$\Omega_{p-1,u}$ ( $p \in \{2, \dots, n-1\}$ )	
$\tilde{\mu}_{1,p}$	tend vers 0 avec $u$
$\tilde{\mu}_{2,p}$	minorées par une constante
$\tilde{\mu}_{1,q}, q \in \{2, \dots, n-1\} \setminus \{p\}$	strictement positive indépendante de $u$

TAB. 1 – Récapitulatif

part, les domaines obtenus aient un diamètre et un volume strictement majorés par  $D_0$  et  $V_0$  respectivement). On lisse l'ouvert ainsi obtenu comme indiqué en annexe B.

**Notation 4.3** Nous noterons, pour  $p \in \{2, \dots, n-1\}$ ,  $\Omega_{p,u,\epsilon_0}$  les domaines ainsi obtenus. Voir figure 4.

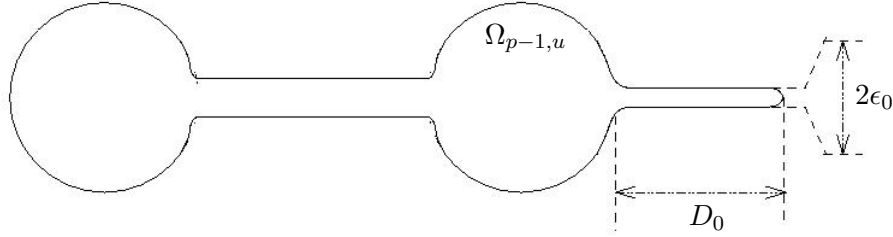


FIG. 4 –  $\Omega_{p,u,\epsilon_0}$

D'après la proposition 2.10, il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $\epsilon_0$  telle que  $\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{p,1/10,\epsilon_0}) \geq c$ .

D'autre part, les minoration récapitulées dans le tableau 1 ne sont pas affectées par l'ajout du cylindre. Plus précisément :

**Lemme 4.4** Il existe une constante  $c' > 0$  indépendante de  $u \leq 1/10$  et de  $\epsilon_0$  telle que :

- $\tilde{\mu}_{2,p}(\Omega_{p,u,\epsilon_0}) \geq c'$ ,
- pour  $q \in \{2, \dots, n-1\} \setminus \{p\}$ ,  $\tilde{\mu}_{1,q}(\Omega_{p,u,\epsilon_0}) \geq c'$ .

**Preuve du lemme 4.4.** C'est la même preuve que celle du lemme 2.13 : la partie épaisse du recouvrement utilisé pour appliquer le lemme de McGowan est cette fois rattachée au cylindre de rayon  $\epsilon_0$  ; mais ce cylindre ne perturbe pas, d'après la proposition 2.10, les minoration du spectre de cette partie épaisse. ■

Fixons à présent  $p \in \{2, \dots, n-1\}$ .

1. Supposons dans un premier temps que  $\tilde{\mu}_{K,p}$  soit plus petit ou égal à  $\tilde{\mu}_{0,p} := \inf \left\{ c, \frac{c'}{\max\{100, \alpha\}} \right\}$ .  
Le réel  $\epsilon_0$  et l'entier  $k \in \{1, \dots, K\}$  étant donnés, il existe alors, par continuité des valeurs propres de  $\Omega_{p,u,\epsilon_0}$  par rapport au paramètre  $u > 0$ ,  $u_k \leq 1/10$  tel que  
–  $\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{p,u_k,\epsilon_0}) = \tilde{\mu}_{k,p}$ ,

- $\tilde{\mu}_{2,p}(\Omega_{p,u,\epsilon_0}) \geq 100 \tilde{\mu}_{K,p}$ ,
  - $\tilde{\mu}_{1,q}(\Omega_{p,u,\epsilon_0}) \geq \alpha \tilde{\mu}_{K,p}$ , pour  $q \in \{2, \dots, n-1\} \setminus \{p\}$ ,
  - $\text{Vol}(\Omega_{p,u_k,\epsilon_0}) < V_0$ ,
  - $\text{diam}(\Omega_{p,u_k,\epsilon_0}) < D_0$ .
2. Plaçons-nous dans un second temps dans le cas où  $\tilde{\mu}_{K,p} \geq \tilde{\mu}_{0,p}$ .

Notons  $h_{\tilde{\mu}} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_{0,p}}{\tilde{\mu}_{K,p}}}$ .

Comme dans le cas précédent, on peut construire un domaine  $\Omega'_{p,u_k,\epsilon_0}$  tel que :

- $\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega'_{p,u_k,\epsilon_0}) = \tilde{\mu}_{k,p} \frac{\tilde{\mu}_{0,p}}{\tilde{\mu}_{K,p}}$ ,
- $\tilde{\mu}_{2,p}(\Omega'_{p,u,\epsilon_0}) \geq c' \geq 100 \tilde{\mu}_{0,p}$ ,
- $\tilde{\mu}_{1,q}(\Omega'_{p,u,\epsilon_0}) \geq c' \geq \alpha \tilde{\mu}_{0,p}$ , pour  $q \in \{2, \dots, n-1\} \setminus \{p\}$ ,
- $\text{Vol}(\Omega'_{p,u_k,\epsilon_0}) < V_0$ ,
- $\text{diam}(\Omega'_{p,u_k,\epsilon_0}) < D_0$ .

Soit alors  $\Omega_{p,u_k,\epsilon_0}$  l'image de  $\Omega'_{p,u_k,\epsilon_0}$  par l'homothétie de rapport  $h_{\tilde{\mu}} \leq 1$ . Nous avons :

- $\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{p,u_k,\epsilon_0}) = \tilde{\mu}_{k,p}$ ,
- $\tilde{\mu}_{2,p}(\Omega_{p,u,\epsilon_0}) \geq 100 \tilde{\mu}_{K,p}$ ,
- $\tilde{\mu}_{1,q}(\Omega_{p,u,\epsilon_0}) \geq \alpha \tilde{\mu}_{K,p}$ , pour  $q \in \{2, \dots, n-1\} \setminus \{p\}$ ,
- $\text{Vol}(\Omega_{p,u_k,\epsilon_0}) < V_0$ ,
- $\text{diam}(\Omega_{p,u_k,\epsilon_0}) < D_0$ .

Les ouverts  $\Omega_{p,u_k,\epsilon_0}$  sont munis d'un cylindre de rayon inférieur ou égal à  $\epsilon_0$ . La fin de la preuve de la proposition 4.1 est alors aisée.

**Notation 4.5** Nous poserons  $\tilde{\mu}_K = \max \{\tilde{\mu}_{K,2}, \dots, \tilde{\mu}_{K,n-1}\}$ .

**Remarque 4.6** Le contrôle du volume des boules que l'on va rattacher au domaine initial est nécessaire afin de prescrire le volume.

De plus, afin de ne pas avoir d'interférences entre les valeurs propres que l'on veut prescrire pour les  $(n-1)$ -formes exactes (A) et le spectre des fonctions (D), nous aurons besoin de travailler dans un cylindre de rayon suffisamment petit.

Ainsi, dans toute la suite, nous fixerons  $V_0$  et  $D_0$  de sorte que :

- $V_0 = \frac{\text{Vol}(\Omega)}{3^{(n-2)}K}$
- $\lambda_{1,0}(B^{n-1}(10D_0)) \geq 100 \tilde{\mu}_K$ , où  $B^{n-1}(10D_0)$  est la boule euclidienne de dimension  $n-1$  et de rayon  $10D_0$ .

### Deuxième étape.

On se donne  $B_0^{(2)}, \dots, B_0^{(n-1)}$ ,  $n-2$  boules fermées de  $(\mathbb{R}_+^*)^K$ , de centre  $(1, \dots, 1)$ , non réduites au point  $(1, \dots, 1)$ , de rayon plus petit ou égal à  $1/10$ , qui respectent la non-multiplicité :  $\forall p \in \{2, \dots, n-1\}$ ,  $\forall \xi^{(p)} \in B_0^p$ ,  $\tilde{\mu}_{1,p}/\xi_1^{(p)^2} < \dots < \tilde{\mu}_{K,p}/\xi_K^{(p)^2}$ .

Nous poserons  $B_0 = B_0^{(2)} \times \dots \times B_0^{(n-1)}$ .

**Notation 4.7** Pour tout  $p \in \{2, \dots, n-2\}$ , tout  $k \in \{1, \dots, K\}$  et tout  $\xi^{(p)} = (\xi_1^{(p)}, \dots, \xi_K^{(p)}) \in B_0^{(p)}$ , soit  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$ , l'image de  $\Omega_{p,k,m}$  par l'homothétie de rapport  $\xi_k^{(p)}$ . Quitte à réduire le rayon des boules  $B_0^{(2)}, \dots, B_0^{(n-1)}$ , on a encore  $\text{Vol}(\Omega_{\xi_k^{(p)},m}) < V_0$  et  $\text{diam}(\Omega_{\xi_k^{(p)},m}) < D_0$ .

### Troisième étape.

Nous allons maintenant recoller les domaines  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$  à un domaine difféomorphe à  $\Omega$ , tel que, pour tout  $q \in \{2, \dots, n-1\}$ , la première valeur propre non nulle pour les  $q$ -formes (A) soit assez grande. Ce domaine devra avoir un diamètre assez grand pour que l'on dispose de la place nécessaire pour lui recoller tous les  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$ . De plus, il nous faudra contrôler son volume. Enfin, il nous faut travailler dans un tube de rayon plus petit que  $10 D_0$  (voir remarque 4.6). Or le théorème 3.1 et la remarque 3.7 nous donnent justement l'existence d'un domaine adéquat :

Soit un réel  $\beta > 0$  (cette constante sera précisée dans la preuve du lemme 4.15) ; il existe un domaine  $\Omega'$  à bord lisse, difféomorphe à  $\Omega$ , tel que, pour tous  $q$  et  $p \in \{2, \dots, n-1\}$ ,  $\mu_{1,q}(\Omega') \geq \beta \tilde{\mu}_K$  (voir notation 4.5). Ce domaine  $\Omega'$  possède un cylindre  $\mathcal{A}$  de longueur plus grande que  $10 n K D_0$  ; son volume vaut  $\frac{\text{Vol}(\Omega)}{3}$ . Enfin, si l'on rallonge le cylindre d'une longueur  $l \geq 0$ , on peut supposer que le bas du spectre non nul des  $q$ -formes (A) ( $q \in \{2, \dots, n-1\}$ ) reste minoré par  $\beta \tilde{\mu}_K$ .

Notons  $\epsilon_{\mathcal{A}}$ , le rayon du cylindre  $\mathcal{A}$ .

Quitte à utiliser une homothétie de rapport convenable, on peut supposer que  $\Omega'$  est effectivement contenu dans un cylindre de rayon plus petit que  $10 D_0$  (l'axe de ce tube étant parallèle à celui du cylindre de  $\Omega'$ ).

Considérons  $(n-2)K$  points  $m_{1,2}, \dots, m_{K,2}, \dots, m_{1,n-1}, \dots, m_{K,n-1}$  du bord de  $\mathcal{A}$ . On choisit ces points de sorte que les normales en ces points à  $\Omega'$  soient deux-à-deux parallèles ; de plus, on peut supposer que les demi-cylindres d'axes respectifs ces demi-droites normales et de rayon  $4D$  ne s'intersectent pas entre eux et n'intersectent pas  $\Omega'$ .

Donnons-nous alors  $\xi = (\xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n-1)}) \in B_0$ . Pour tout  $p \in \{2, \dots, n-1\}$ , tout  $k \in \{1, \dots, K\}$  et tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , on recolle alors à  $\Omega'$   $(n-2)K$  domaines cylindriques d'axes respectifs les normales à  $\partial\Omega'$  en  $m_{1,2}, \dots, m_{K,2}, \dots, m_{1,n-1}, \dots, m_{K,n-1}$ , de rayon  $\xi_k^{(p)} \epsilon_m$  et de longueur  $\xi_k^{(p)}$  (on peut supposer que  $\epsilon_0 \leq \frac{\epsilon_{\mathcal{A}}}{3}$ ). Le lissage de l'ouvert s'effectue en suivant la méthode indiquée dans l'annexe B.

**Notation 4.8** Nous appellerons  $\Omega_{\xi,m}$  le nouveau domaine ainsi construit.

On peut alors rassembler,  $m$  étant donné, chaque  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$  avec  $\Omega_{\xi,m}$ , le long de l'embout correspondant, de sorte que l'intersection de chacun des deux cylindres ait une longueur  $\xi_k^{(p)}/2 + 2\xi_k^{(p)} \epsilon_m/10$ . Voir figure 5 ; sur ce dessin le domaine du type  $\Omega_{p,u}$  est représenté, pour plus de clarté, par des boules et non par des haltères -ce que nous ferons dans tous les dessins qui suivront.

Notons temporairement  $\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}^{tmp}$  ce nouveau domaine.

**Remarque 4.9** Le domaine  $\Omega_{\xi,m}$ , qui consiste en  $\Omega'$  auquel on recolle des cylindres, est un domaine intermédiaire entre  $\Omega'$  et  $\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}^{tmp}$ .

Nous introduisons ce domaine afin de pouvoir effectuer facilement le recollement entre  $\Omega'$  et les ouverts de type  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$ , tout en restant dans la classe des ouverts à bord lisse.

$$\text{Par construction, } \text{Vol} \left( \Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}^{tmp} \right) \leq \frac{\text{Vol}(\Omega)}{3} + (n-2) K \frac{\text{Vol}(\Omega)}{3(n-2)K} = \frac{2 \text{Vol}(\Omega)}{3}.$$

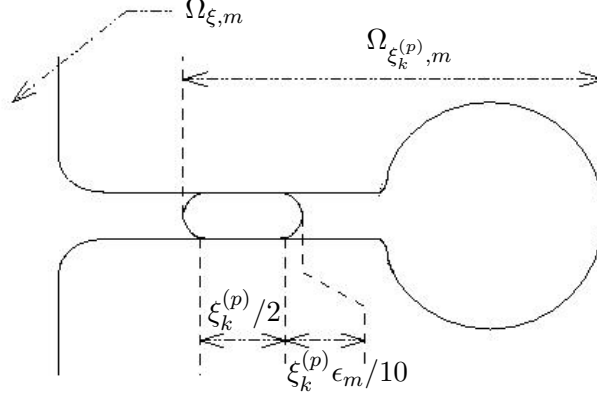


FIG. 5 – Jonction des deux cylindres

Il ne reste plus qu'à rallonger le cylindre  $\mathcal{A}$  de  $\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}^{tmp}$  afin d'atteindre le même volume que  $\Omega$ .

**Notation 4.10** Soit  $\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}$ , le domaine obtenu alors (cf figures 5 et 6). Par construction, pour tout  $\xi$  et  $m$ ,  $\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}$  est difféomorphe à  $\Omega$  et possède le même volume.

**Remarque 4.11** Ces domaines  $\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}$  sont contenus dans un tube de rayon plus petit que  $10 D_0$ . Par conséquent, pour tout  $\xi$  et tout  $m$ ,  $\mu_{1,n}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}) > \tilde{\mu}_{K,n-1}$ .

**Notation 4.12** Nous noterons  $\Omega'_{\xi, m}$  le domaine  $\Omega_{\xi, m}$  dont on a rallongé le cylindre de la même longueur que  $\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}^{tmp}$ . Ainsi,  $\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}$  peut se voir comme  $\Omega'_{\xi, m}$  auquel on rajoute les domaines  $\Omega_{\xi_k^{(p)}, m}$ .

Enfin, nous aurons aussi besoin de considérer le domaine  $\tilde{\Omega}_{\xi, m}$  constitué du domaine  $\Omega'$  dont on a également rallongé le cylindre de la même longueur que  $\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}^{tmp}$ .

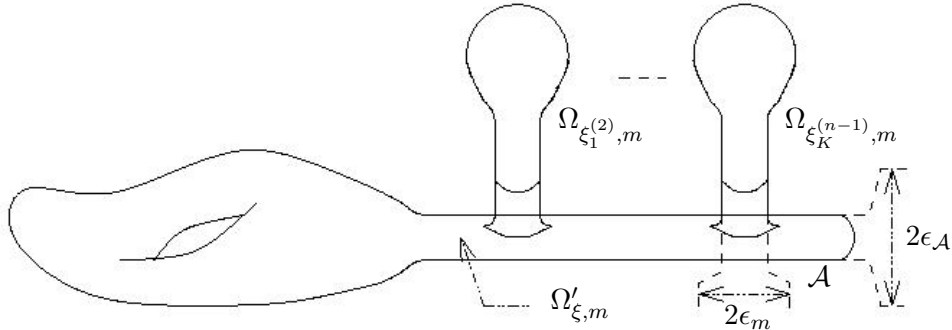


FIG. 6 –  $\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}$

**Quatrième étape.** Cette étape consiste à prouver, pour tout  $p$  compris entre 2 et  $n - 1$ , un résultat de convergence des  $K$  premières valeurs propres pour les  $p$ -formes (A) de la suite de domaines  $\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}$ , lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ .

**Proposition 4.13**

– *L'application*

$$\begin{array}{ccc} B_0 & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+^*)^{(n-2)K} \\ \xi & \mapsto & (\tilde{\mu}_{1,2}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}), \dots, \tilde{\mu}_{K,2}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}), \dots, \\ & & \tilde{\mu}_{1,n-1}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}), \dots, \tilde{\mu}_{K,n-1}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m})) \end{array}$$

*est continue.*

– *On a la convergence :*

$$\forall p \in \{2, \dots, n-1\}, \forall k \in \{1, \dots, K\}, \tilde{\mu}_{k,p}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\mu}_{k,p}}{\xi_k^{(p)2}}.$$

Montrons la proposition 4.13.

Le premier point est une conséquence de la proposition 3.3 de [D1].

Le second point est plus délicat. Nous le démontrons dans les pages qui suivent.

Considérons un entier donné  $p \in \{2, \dots, n-1\}$ .

Nous devons montrer que les formes propres exactes associées aux  $K$  premières valeurs propres  $(\tilde{\mu}_{k,p}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}))_{1 \leq k \leq K}$  se concentrent, lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ , sur les domaines respectifs  $\Omega_{\xi_k^{(p)}, m}$ .

Considérons, pour  $p \in \{2, \dots, n-1\}$ , les ensembles de domaines :

$$\mathcal{O}^{(p)} = \left\{ \Omega_{\xi_1^{(p)}, m}, \dots, \Omega_{\xi_K^{(p)}, m} \right\}.$$

Il s'agit des domaines qui donneront le spectre des  $p$ -formes exactes.

**Notation 4.14** Pour  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \{2, \dots, n-1\}$  et  $\xi \in B_0$  soit  $\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}^{(p)}$ , le domaine obtenu de la même façon que  $\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}$  mais sans recoller les domaines de l'ensemble  $\mathcal{O}^{(p)}$ .

**Lemme 4.15** Il existe  $m_p \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $m \geq m_p$  et tout  $\xi \in B_0$ ,  $\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}^{(p)}) \geq 5 \tilde{\mu}_K$ .

**Preuve.** Il s'agit d'une conséquence de la proposition 2.10 et des propriétés spectrales des domaines du type  $\Omega_{\xi_k^{(q)}, m}$ , via le lemme de McGowan.

On considère le recouvrement de  $\Omega_{\mu, \xi, m}^{(p)}$  constitué par :

- les domaines  $\Omega_{\xi_k^{(q)}, m}$ ,  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,  $q \neq p$ ,
- le domaine  $\Omega'_{\xi, m}$  (voir notation 4.12).



D'après la proposition 2.10 et la remarque 3.7 et puisque  $\xi$  varie dans un compact, les valeurs propres  $\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega'_{\xi,m})$  sont minorées par une constante  $C(\beta) > 0$  qui peut être rendue aussi grande que l'on veut pourvu que  $\beta$  et  $m$  soient assez grands.

Notons que, dans la proposition 2.10, on étudie le spectre d'un domaine auquel on rajoute un seul cylindre. Toutefois, le résultat est le même si l'on rajoute plusieurs cylindres (en nombre fini).

De plus, si  $q \neq p$ , et  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,  $\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{\xi_k^{(q)},m}) \geq \alpha \tilde{\mu}_{K,p}$ .

Enfin les intersections des ouverts du recouvrement sont des domaines convexes de diamètres respectifs  $\xi_k^{(q)}/2$ .

D'après le théorème 2.11, les valeurs propres (exactes) de ces intersections sont minorées par une constante positive non nulle qui ne dépend que de la dimension. De plus, ces intersections ne possèdent pas de cohomologie absolue en degré différent de 0.

Par le lemme de McGowan, il existe trois constantes  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  qui ne dépendent que de la dimension, telles que

$$\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}^{(p)}) \geq \frac{a}{\frac{b}{\alpha} + \frac{c}{C(\beta)}}.$$

D'où le résultat, pourvu que  $\alpha$  et  $\beta$  soient choisis assez grands, ce choix ne dépendant que de la dimension. ■

Nous allons maintenant donner la première étape de la preuve de la convergence du spectre, à savoir l'étude de la limite supérieure des  $K$  premières valeurs propres non nulles pour les  $p$ -formes exactes (A) de  $\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}$ , lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$  :

**Lemme 4.16** *Soit  $p \in \{2, \dots, n-1\}$  Pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,*

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{k,p}(\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}) \leq \tilde{\mu}_{k,p}/\xi_k^{(p)2}.$$

Avant de prouver ce lemme nous aurons besoin de montrer qu'une forme propre dont on contrôle la norme  $L^2$  sur le domaine  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$  tend vers 0 au bout du cylindre  $\mathcal{C}_{\epsilon_m}$ .

Plus précisément, soit  $\alpha_{\xi_k^{(p)},m}$  une  $p$ -forme propre exacte (A), de norme 1, sur  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$ , associée à la valeur propre  $\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{\xi_k^{(p)},m}) = \tilde{\mu}_{k,p}/\xi_k^{(p)2}$ .

On peut écrire  $\alpha_{\xi_k^{(p)},m} = d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}$ , où  $\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}$  est une  $(p-1)$ -forme propre coexacte (A) associée également à la valeur propre  $\mu_{k,p}/\xi_k^{(p)2}$ .

Notons que  $\mathcal{R}(\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}) = \frac{\|d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|^2}{\|\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|^2}$ . Donc  $\|\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|^2 = \frac{\|\alpha_{\xi_k^{(p)},m}\|^2}{\tilde{\mu}_{k,p}/\xi_k^{(p)2}}$ .

En particulier,  $\|\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|$  est bornée indépendamment de  $m$ .

Soit alors  $f_0$ , une fonction lisse sur  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$  telle que : sur le cylindre,  $f_0$  ne dépend que de l'abscisse le long de l'axe ;  $f_0$  vaut 1 sur une longueur  $\xi_k^{(p)}$  en partant de l'extrémité, puis décroît jusqu'à 0 sur une longueur  $\xi_k^{(p)}/6$  ;  $f_0$  vaut alors 0 sur le reste du domaine (voir figure 7). Notons que le gradient de  $f_0$  est borné indépendamment de  $m$ .

**Lemme 4.17** *Nous avons :*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)}, m}\|_2^2 = 0$$

et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|\delta(f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)}, m})\|_2^2 = 0.$$

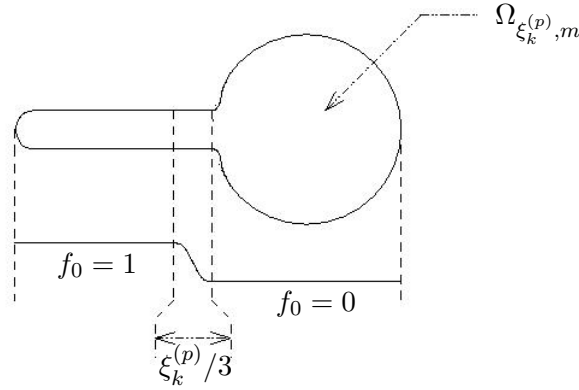


FIG. 7 – Fonction  $f_0$  sur  $\Omega_{\xi_k^{(p)}, m}$ .

**Preuve.** La preuve repose sur le fait que pour  $1 \leq p \leq n-2$ , la première valeur propre du spectre des  $p$ -formes coexactes du cylindre tend vers  $+\infty$  lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ .

Nous allons montrer tout d'abord que  $q(f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)}, m})$  est borné indépendamment de  $m$ .

Par définition,  $q(f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)}, m}) = \|d f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)}, m}\|_2^2 + \|\delta f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)}, m}\|_2^2$ .

Mais  $d f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)}, m} = df_0 \wedge \alpha_{\xi_k^{(p)}, m} + f_0 d\alpha_{\xi_k^{(p)}, m}$ .

Donc

$$\begin{aligned} \|d f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)}, m}\|_2^2 &= \int_{\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}} |df_0 \wedge \alpha_{\xi_k^{(p)}, m}|^2 + \\ &\int_{\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}} 2f_0 df_0 \wedge \alpha_{\xi_k^{(p)}, m} \wedge \star d\alpha_{\xi_k^{(p)}, m} + \int_{\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}} |f_0 d\alpha_{\xi_k^{(p)}, m}|^2 = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Mais

1.  $I_1 \leq \|df_0\|_\infty \|\alpha_{\xi_k^{(p)}, m}\|_2^2$
2.  $I_2 \leq 2\|f_0 df_0\|_\infty \|\alpha_{\xi_k^{(p)}, m}\|_2^2 \|d\alpha_{\xi_k^{(p)}, m}\|_2^2$
3.  $I_3 \leq \|f_0\|_\infty \|d\alpha_{\xi_k^{(p)}, m}\|_2^2$ .

Comme  $\alpha_{\xi_k^{(p)}, m}$  est propre, associée à la valeur propre  $\tilde{\mu}_{k,p}/\xi_k^{(p)2}$  (qui est majoré indépendamment de  $m$  et même de  $\xi$ ), et qu'elle est de norme 1,  $\|d f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)}, m}\|_2^2$  est bien majorée indépendamment de  $m$ .

On démontre de même que  $\|\delta f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m}\|_2^2$  est bien majorée indépendamment de  $m$ . Maintenant la forme  $f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m}$  est une forme-test sur le cylindre  $\mathcal{C}_{\epsilon_m}$  (qui vérifie les conditions de bord (A) à l'ordre 0). Mais pour  $2 \leq p \leq n-1$ ,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mu_{1,p}(\mathcal{C}_{\epsilon_m}) = +\infty$ . Donc, comme le cylindre ne possède pas de formes harmoniques (A) -sauf en degré 0-

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{R}(f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m}) = +\infty. \text{ Donc } \|f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m}\|_2^2 = \frac{q(f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m})}{\mathcal{R}(f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m})} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

Maintenant,  $\delta(f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m}) = f_0 \delta \alpha_{\xi_k^{(p)},m} - i \nabla f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m}$ . Donc  $\delta(f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m})$  vérifie les conditions de bord (A) à l'ordre 0 sur le cylindre. De plus, on montre comme plus haut que la norme de  $d\delta(f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m})$  est majorée indépendamment de  $m$ . Par conséquent, on montre comme précédemment que  $\|\delta(f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m})\|_2^2$  tend vers 0. ■

#### Corollaire 4.18

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_0 \alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2^2 = 0.$$

**Preuve.** On choisit une fonction  $f_{0,1}$  de même type que  $f_0$  mais qui vaut 1 en tout point où  $f_0$  est non nulle. Par le lemme 4.17,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_{0,1} \alpha_{\xi_k^{(p)},m}\|_2^2 = 0$ . Il s'ensuit que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|i \nabla f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m}\|_2^2 = 0.$$

Le résultat provient alors de la formule  $f_0 \alpha'_{\xi_k^{(p)},m} = \frac{\xi_k^{(p)2}}{\mu_{k,p}} \left( \delta(f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m}) + i \nabla f_0 \alpha_{\xi_k^{(p)},m} \right)$ . ■

**Preuve du lemme 4.16.** L'entier  $p$  étant donné dans  $\{2, \dots, n-1\}$ , pour tout  $k \in \{1, \dots, K_p\}$ , on considère la fonction lisse  $f_k^{(p)}$  sur  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$  définie comme suit (voir figure 8) : cette fonction est nulle en dehors de  $\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m} \setminus \Omega_{\xi_k^{(p)},m}$ . Décrivons-la donc sur  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$ . On part de l'extrémité du cylindre de  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$  :  $f_k^{(p)}$  est nulle sur la longueur  $\frac{\xi_k^{(p)} \epsilon_m}{10}$  puis croît jusqu'à 1 (avec un gradient borné indépendamment de  $m$ ) sur une longueur  $\frac{\xi_k^{(p)}}{2}$  et vaut 1 sur le reste du domaine. Notons que, sur le cylindre,  $f_k^{(p)}$  ne dépend que de l'abscisse le long de l'axe. La fonction  $f_k^{(p)}$  ainsi que ses dérivées d'ordre 1 et 2 sont en particulier bornées indépendamment de  $m$ .

Soit à présent les formes test  $d(f_1^{(p)} \alpha'_{\xi_1^{(p)},m}), \dots, d(f_K^{(p)} \alpha'_{\xi_K^{(p)},m})$ .

Montrons que pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{R}(d(f_1^{(p)} \alpha'_{\xi_1^{(p)},m})) = \tilde{\mu}_{k,p} / \xi_k^{(p)2}$ .

Nous devons pour cela montrer que les quantités  $\left| \|d(f_k^{(p)} \alpha'_{\xi_k^{(p)},m})\|_2^2 - \|d \alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2^2 \right|$  et

$\left| \|\delta d(f_k^{(p)} \alpha'_{\xi_k^{(p)},m})\|_2^2 - \|\delta d \alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2^2 \right|$  tendent vers 0 lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$  :

Par définition de  $f_k^{(p)}$  et de  $\alpha_{\xi_k^{(p)},m}$ , les normes  $L^2$  sont prises sur le domaine  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$ .

Nous avons alors :

$$\left| \|d(f_k^{(p)} \alpha'_{\xi_k^{(p)},m})\|_2^2 - \|d \alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2^2 \right| =$$

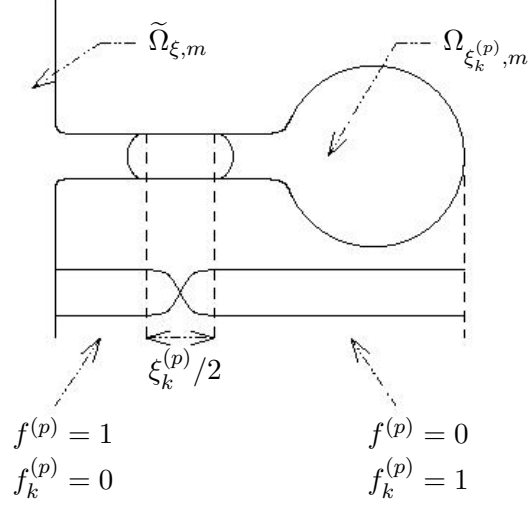


FIG. 8 –  $f^{(p)}$  et  $f_k^{(p)}$

$$\begin{aligned} & \left| \langle d(f_k^{(p)} \alpha'_{\xi_k^{(p)},m}) + d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m} | d(f_k^{(p)} \alpha'_{\xi_k^{(p)},m}) - d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m} \rangle \right| \leq \\ & \|d(f_k^{(p)} \alpha'_{\xi_k^{(p)},m}) + d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2 \cdot \|d(f_k^{(p)} \alpha'_{\xi_k^{(p)},m}) - d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2 \leq \\ & \left( \|df_k^{(p)} \wedge \alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2 + (1 + f_k^{(p)}) \|d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2 \right) \cdot \left( \|df_k^{(p)} \wedge \alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2 + \|(1 - f_k^{(p)}) d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2 \right). \end{aligned}$$

Mais comme la norme de  $\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}$  vaut  $\frac{\xi_k^{(p)2}}{\mu_{k,p}}$  et  $f_k^{(p)}$  a un gradient borné indépendamment de  $m$ ,  $\|df_k^{(p)} \wedge \alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2 + (1 + f_k^{(p)}) \|d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2$  est borné indépendamment de  $m$ .

De plus, par le lemme 4.17 et le corollaire 4.18,  $\|df_k^{(p)} \wedge \alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2$  et  $\|(1 - f_k^{(p)}) d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2$  tendent vers 0 lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ . En effet, la fonction  $f_k^{(p)}$  est différente de 1 en des points où  $f_0$  vaut 1. Donc  $\left| \|d(f_k^{(p)} \alpha'_{\xi_k^{(p)},m})\|_2^2 - \|d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2^2 \right|$  tend vers 0 lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ .

On montre de même que  $\left| \|\delta d(f_k^{(p)} \alpha'_{\xi_k^{(p)},m})\|_2^2 - \|\delta d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2^2 \right|$  tend vers 0 lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ .

Comme  $\|d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2$  et  $\|\delta d\alpha'_{\xi_k^{(p)},m}\|_2$  sont bornées indépendamment de  $m$ , on a le résultat sur le quotient de Rayleigh.

Maintenant, ces formes-test sont exactes et deux-à-deux orthogonales.

Il suffit alors d'appliquer le principe du Min-Max. ■

Il faut maintenant montrer que pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{k,p}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}) \geq \tilde{\mu}_{k,p}/\xi_k^{(p)2}.$$

Tout d'abord, de même que pour les domaines  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$ , les formes propres exactes (A) de norme 1 sur  $\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}$  associées à des valeurs propres bornées indépendamment de  $m$  s'évanouissent sur les cylindres. On considère la fonction lisse  $g$  sur chaque  $\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}$  définie comme suit : la fonction  $g$  vaut 0 en dehors des cylindres ; sur les cylindres,  $g$  ne dépend que de l'abscisse le long de l'axe et vaut 1 sur un intervalle de longueur  $\xi_k^{(p)}/2$  autour du milieu de l'axe. De plus,  $g$  a un gradient borné indépendamment de  $m$ . Voir figure 9.

**Lemme 4.19** Soit  $p \in \{2, \dots, n-1\}$ .

Soit  $d\phi$ , une  $p$ -forme propre exacte (A) de norme 1 sur  $\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}$  associée à une valeur propre majorée indépendamment de  $m$ .

Grâce au théorème de Hodge, la forme  $\phi$  peut être choisie coexacte et satisfait les conditions de bord (A).

Alors nous avons  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|g\phi\|_2^2 = 0$  et  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|g d\phi\|_2^2 = 0$ .

**Preuve.** Une nouvelle application du lemme de McGowan montre qu'il existe une constante strictement positive  $C$ , non nulle et indépendante de  $\xi$  et  $m$  telle que pour tout  $p \in \{2, \dots, n-1\}$ ,  $\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}) \geq C$ . Alors,  $\|\phi\|^2 \leq 1/C$ . La suite de la preuve est alors identique à celle de 4.17 et 4.18. ■

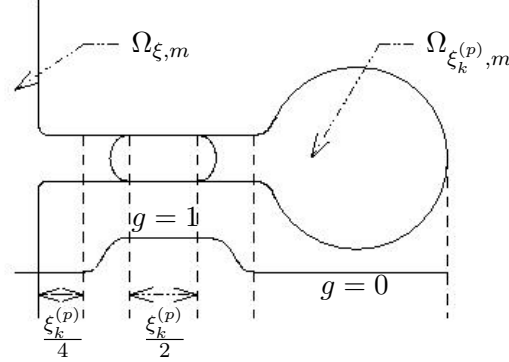


FIG. 9 – Fonction  $g$

La suite de la preuve de 4.13 consiste en un raisonnement par récurrence qui montre à la fois, la convergence des  $K$  premières valeurs propres non nulles de  $\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}$  pour les  $p$ -formes exactes (A) vers  $(\tilde{\mu}_{1,p}/\xi_1^{(p)2}, \dots, \tilde{\mu}_{K,p}/\xi_K^{(p)2})$  et la concentration des formes propres correspondantes sur les domaines  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$ .

Soit  $(d\phi_1^m, \dots, d\phi_K^m)$ , une base orthonormale de formes propres exactes (A) associées aux valeurs propres  $\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}), \dots, \tilde{\mu}_{K,p}(\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m})$ . On peut supposer que les formes  $\phi_1^m, \dots, \phi_K^m$  sont coexactes et vérifient les conditions de bord (A).

Soit la fonction  $f^{(p)}$  qui vaut 1 sur  $\tilde{\Omega}_{\xi,m}$  ainsi que le long de chaque petit cylindre, sur une longueur respective de  $\xi_k^{(p)}/2 - \xi_k^{(p)}\epsilon_m/10$ , puis décroît vers 0 sur une longueur  $\xi_k^{(p)}/2$  et vaut 0 sur le reste de  $\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}$ . Encore une fois,  $f^{(p)}$  ne dépend, sur les cylindres, que

de l'abscisse le long de l'axe. Les dérivées de  $f^{(p)}$  sont bornées indépendamment de  $m$ . Voir figure 8. Notons que c'est en des points où la fonction  $g$  vaut 1 que les fonctions  $f^{(p)}, f_1^{(p)}, \dots, f_K^{(p)}$  sont non constantes.

L'idée qui sous-tend ce qui suit repose sur le fait que les fonctions propres tendent vers 0 là où on les modifie. Notons en particulier qu'il n'est pas nécessaire que  $f^{(p)} + f_k^{(p)}$  vaille 1 là où  $f_k^{(p)}$  n'est pas constante.

Comme dans la preuve du lemme 4.16, le lemme 4.19 donne

$$q(d f^{(p)} \phi_1^m) + q(d f_1^{(p)} \phi_1^m) + \dots + q(d f_K^{(p)} \phi_1^m) = q(d \phi_1^m) + v_m^{(1)}$$

et

$$\|d f^{(p)} \phi_1^m\|^2 + \|d f_1^{(p)} \phi_1^m\|^2 + \dots + \|d f_K^{(p)} \phi_1^m\|^2 = \|d \phi_1^m\|^2 + v_m^{(2)}$$

avec  $\lim_{m \rightarrow +\infty} v_m^{(1)} = 0$  et  $\lim_{m \rightarrow +\infty} v_m^{(2)} = 0$ .

Comme  $q(d \phi_1^m)$  et  $\|d \phi_1^m\|^2$  sont bornés indépendamment de  $m$ ,

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{R}(\phi_1^m) = \liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{q(d f^{(p)} \phi_1^m) + q(d f_1^{(p)} \phi_1^m) + \dots + q(d f_K^{(p)} \phi_1^m)}{\|d f^{(p)} \phi_1^m\|^2 + \|d f_1^{(p)} \phi_1^m\|^2 + \dots + \|d f_K^{(p)} \phi_1^m\|^2}.$$

À présent, les formes  $d f^{(p)} \phi_1^m, \dots, d f_K^{(p)} \phi_1^m$  sont exactes et vérifient les conditions de bord (A) à l'ordre 0.

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \frac{q(d f^{(p)} \phi_1^m) + q(d f_1^{(p)} \phi_1^m) + \dots + q(d f_K^{(p)} \phi_1^m)}{\|d f^{(p)} \phi_1^m\|^2 + \|d f_1^{(p)} \phi_1^m\|^2 + \dots + \|d f_K^{(p)} \phi_1^m\|^2} \geq \\ & \frac{\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}^{(p)}) \|d f^{(p)} \phi_1^m\|^2 + \tilde{\mu}_{1,p}/\xi_1^{(p)2} \|d f_1^{(p)} \phi_1^m\|^2}{\|d f^{(p)} \phi_1^m\|^2 + \|d f_1^{(p)} \phi_1^m\|^2 + \dots + \|d f_K^{(p)} \phi_1^m\|^2} + \dots + \\ & \frac{\tilde{\mu}_{K,p}/\xi_K^{(p)2} \|d f_K^{(p)} \phi_1^m\|^2}{\|d f^{(p)} \phi_1^m\|^2 + \|d f_1^{(p)} \phi_1^m\|^2 + \dots + \|d f_K^{(p)} \phi_1^m\|^2}, \end{aligned}$$

avec, d'après le lemme 4.15,  $\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}^{(p)}) \geq 5\tilde{\mu}_K \geq 5\tilde{\mu}_{1,p} \geq 4\tilde{\mu}_{1,p}/\xi_1^{(p)2}$  (car  $B_0^{(p)}$  et  $B_0^{(p+1)}$  ont un rayon majoré par  $1/10$ ) et avec  $\tilde{\mu}_{1,p}/\xi_1^{(p)2} < \dots < \tilde{\mu}_{K,p}/\xi_K^{(p)2}$ .

Donc  $\liminf_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{R}(d \phi_1^m) \geq \tilde{\mu}_{1,p}/\xi_1^{(p)2}$ , c'est-à-dire  $\liminf_{m \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}^{(p)}) \geq \tilde{\mu}_{1,p}/\xi_1^{(p)2}$ .

Par le lemme 4.16, on en déduit que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}^{(p)}) = \tilde{\mu}_{1,p}/\xi_1^{(p)2}$ .

De plus, par le lemme 4.19,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|d f^{(p)} \phi_1^m\|^2 + \|d f_1^{(p)} \phi_1^m\|^2 + \dots + \|d f_K^{(p)} \phi_1^m\|^2 = 1$ .

S'il existait une sous-suite  $(\epsilon_{\phi(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|d f^{(p)} \phi_1^{\epsilon_{\phi(m)}}\| = l > 0$ ,  $\mathcal{R}(d \phi_1^{\epsilon_{\phi(m)}})$  aurait une limite plus grande ou égale à  $\tilde{\mu}_{1,p}/\xi_1^{(p)2} + 3l\tilde{\mu}_{1,p}/\xi_1^{(p)2} > \tilde{\mu}_{1,p}/\xi_1^{(p)2}$ , ce qui n'est pas vrai. Ainsi, nous avons  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|d f^{(p)} \phi_1^m\| = 0$ .

On montre de même que pour tout  $i \in \{2, \dots, K\}$ ,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|d f_i^{(p)} \phi_1^m\|_2 = 0$ .

Supposons avoir montré que pour un  $L < K$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, L\}$ ,

$$\begin{aligned} & - \lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{i,p}/\xi_i^{(p)2} \\ & - \lim_{m \rightarrow +\infty} \|d f^{(p)} \phi_i^m\|_2 = 0 \\ & - \forall j \in \{1, \dots, K\} \setminus \{i\}, \lim_{m \rightarrow +\infty} \|d f_j^{(p)} \phi_i^m\|_2 = 0. \end{aligned}$$

Montrons alors que :

$$\begin{aligned} & - \lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{L+1,p}/\xi_{L+1}^{(p)2} \\ & - \lim_{m \rightarrow +\infty} \|d f^{(p)} \phi_{L+1}^m\|_2 = 0 \\ & - \forall j \in \{1, \dots, K\} \setminus \{L+1\}, \lim_{m \rightarrow +\infty} \|d f_j^{(p)} \phi_{L+1}^m\|_2 = 0. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.19, les quotients  $\mathcal{R}(d\phi_{L+1}^m)$  et

$$\frac{q(d f^{(p)} \phi_{L+1}^m) + q(d f_1^{(p)} \phi_{L+1}^m) + \dots + q(d f_K^{(p)} \phi_{L+1}^m)}{\|d f^{(p)} \phi_{L+1}^m\| + \|d f_1^{(p)} \phi_{L+1}^m\| + \dots + \|d f_K^{(p)} \phi_{L+1}^m\|}$$

ont même limite inférieure.

Puisque les formes  $(d\phi_1^m, \dots, d\phi_K^m)$  sont deux à deux orthogonales et que, par hypothèse de récurrence, les formes  $(d\phi_1^m, \dots, d\phi_L^m)$  se concentrent respectivement sur

$$\Omega_{\xi_1^{(p)},m}, \dots, \Omega_{\xi_L^{(p)},m}, \text{ nous avons, pour tout } k \in \{1, \dots, L\}, \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle d\phi_k^m, d f_k^{(p)} \phi_{L+1}^m \rangle = 0.$$

Par conséquent, par définition des domaines  $\Omega_{\xi_k^{(p)},m}$ , si  $m$  est assez grand,

$$\begin{aligned} & \frac{q(d f^{(p)} \phi_{L+1}^m) + q(d f_1^{(p)} \phi_{L+1}^m) + \dots + q(d f_K^{(p)} \phi_{L+1}^m)}{\|d f^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2 + \|d f_1^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2 + \dots + \|d f_K^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2} \geq \\ & \frac{\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}^{(p)}) \|d f^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2 + 50\tilde{\mu}_{K,p}/\xi_K^{(p)2} \|d f_1^{(p)} \phi_1^m\|^2}{\|d f^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2 + \|d f_1^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2 + \dots + \|d f_K^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2} + \dots + \\ & \frac{50\tilde{\mu}_{K,p}/\xi_K^{(p)2} \|d f_L^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2}{\|d f^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2 + \|d f_1^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2 + \dots + \|d f_K^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2} + \\ & \frac{\tilde{\mu}_{L+1,p}/\xi_{L+1}^{(p)2} \|d f_{L+1}^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2 + \dots + \tilde{\mu}_{K,p}/\xi_K^{(p)2} \|d f_K^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2}{\|d f^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2 + \|d f_1^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2 + \dots + \|d f_K^{(p)} \phi_{L+1}^m\|^2}, \end{aligned}$$

avec, par le lemme 4.15,  $\tilde{\mu}_{1,p}(\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}^{(p)}) \geq 5\tilde{\mu}_K \geq 5\tilde{\mu}_{L+1,p} \geq 4\tilde{\mu}_{L+1,p}/\xi_{L+1}^{(p)2}$ .

On en déduit déjà que  $\liminf_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{R}(d\phi_{L+1}^m) \geq \tilde{\mu}_{L+1,p}/\xi_{L+1}^{(p)2}$ , d'où, par le lemme 4.16,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_{L+1,p}(\Omega_{\tilde{\mu},\xi,m}^{(p)}) = \tilde{\mu}_{L+1,p}/\xi_{L+1}^{(p)2}.$$

On montre alors comme dans l'étape d'initialisation de la récurrence que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|d f^{(p)} \phi_{L+1}^m\|_2 = 0 \text{ et que pour tout } j \in \{1, \dots, K\} \setminus \{L+1\}, \lim_{m \rightarrow \infty} \|d f_j^{(p)} \phi_{L+1}^m\|_2 = 0.$$

Ceci termine la preuve de la proposition 4.13.

**Remarque 4.20** Nous avons utilisé de façon fondamentale le fait que les valeurs propres à prescrire n'ont pas de multiplicité. En effet, c'est cela qui nous a permis de "localiser" les formes propres afin d'obtenir la convergence du spectre.

Terminons à présent le théorème 1.1 lorsque  $n \geq 3$  et  $p \in \{2, \dots, n-1\}$ .

Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et tout  $\xi \in B_0$ , soit le domaine  $\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}$  de la proposition 4.13. Soit alors la suite d'applications  $(\Phi_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$\begin{aligned} \Phi_m : B_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^{(n-2)K} \\ \xi &\longmapsto \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_{1,2}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}) - \tilde{\mu}_{1,2}, \dots, \tilde{\mu}_{K,2}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}) - \tilde{\mu}_{K,2}, \dots, \\ \tilde{\mu}_{1,n-1}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}) - \tilde{\mu}_{1,n-1}, \dots, \tilde{\mu}_{K,n-1}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi, m}) - \tilde{\mu}_{K,n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit également l'application

$$\begin{aligned} \Phi : B_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^{(n-2)K} \\ \xi &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\mu}_{1,2}}{\xi_1^{(2)/2}} - \tilde{\mu}_{1,2}, \dots, \frac{\tilde{\mu}_{K,2}}{\xi_K^{(2)/2}} - \tilde{\mu}_{K,2}, \dots, \\ \frac{\tilde{\mu}_{1,n-1}}{\xi_1^{(n-1)/2}} - \tilde{\mu}_{1,n-1}, \dots, \frac{\tilde{\mu}_{K,n-1}}{\xi_K^{(n-1)/2}} - \tilde{\mu}_{K,n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'après le premier point de la proposition 4.13, la suite  $(\Phi_m)$  est une suite d'applications continues sur le compact  $B_0$ .

De plus, l'application  $\Phi$  est un difféomorphisme.

D'après le second point de la proposition 4.13, la suite  $(\Phi_m)$  converge simplement vers  $\Phi$ . Comme  $B_0$  est compact et que les applications  $\Phi_m$  et  $\Phi$  sont continues, la convergence est en fait, d'après le théorème de Dini, uniforme. On applique alors le lemme suivant (voir [CV1]) :

**Lemme 4.21** *Soit  $(\Phi_m)$ , une suite d'applications continues d'une boule fermée  $B_0 \subset \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^K$ , qui converge uniformément vers un difféomorphisme  $\Phi$  de  $B_0$  sur un compact de  $\mathbb{R}^K$  contenant 0 dans son intérieur.*

*Alors, si  $m$  est assez grand, 0 est dans l'image de  $\Phi_m$ .*

Ainsi, il existe un entier  $M_0 \in \mathbb{N}$  et un élément  $\xi_0 \in B_0$  tels que  $\Phi_{M_0}(\xi_0) = 0$ , c'est-à-dire tels que pour tout  $p \in \{1, \dots, n-1\}$  et tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,  $\tilde{\mu}_{k,p}(\Omega_{\tilde{\mu}, \xi_0, M_0}) = \tilde{\mu}_{k,p}$ . On choisit donc  $\Omega_2 = \Omega_{\tilde{\mu}, \xi_0, M_0}$ .

## 4.2 Existence de $\Omega_1$ .

Nous allons redonner rapidement une preuve du théorème 1.4 de [CV1] *sans multiplicité et prescrivant également le spectre des 1-formes  $(A)$ .*

La preuve s'appuie sur le résultat de [A2] donnant l'asymptotique des petites valeurs propres lorsqu'on relie des domaines par des anses de petit rayon.

Les domaines que nous allons construire seront des voisinages tubulaires de graphes en étoile.

Le lemme suivant, qui est classique, montre que l'on peut prescrire le spectre sans multiplicité de tels graphes :



**Lemme 4.22** Soit  $\mathcal{S}$ , l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre  $K + 1$  qui ne possèdent des termes non nuls que sur la diagonale, la première ligne et la première colonne.

Soit  $\mu = (0 < \mu_1 < \dots < \mu_K)$ , une suite strictement croissante de réels positifs qui commence à 0.

Il existe une famille de  $K + 1$  réels strictement positifs  $a = (a_0, \dots, a_K)$  et une famille de  $K$  réels strictement positifs  $\kappa = (\kappa_{01}, \kappa_{02}, \dots, \kappa_{0K})$  tels que la matrice  $B(a, \kappa) \in \mathcal{S}$  définie par :

$$\begin{aligned} b_{00} &= a_0 \sum_{j=1}^K \frac{1}{\kappa_{0j}} \\ b_{ii} &= a_i \frac{1}{\kappa_{0i}} \quad \text{si } i \in \{1, \dots, K\} \\ b_{0,j} &= b_{j,0} = -\sqrt{a_0 a_j} \frac{1}{\kappa_{0j}} \quad \text{pour } j \in \{1, \dots, K\} \end{aligned}$$

admette la suite  $\mu$  pour spectre.

De plus, l'application qui à  $a_0, \dots, a_K$  associe le spectre de la matrice  $B(a, \kappa)$  est un difféomorphisme local sur  $\mathbb{R}_+^{*(K+1)}$

La preuve est classique ; elle repose de manière fondamentale sur le fait qu'on prescrit sans multiplicité. Voir par exemple [CV2].

Nous pouvons alors établir la proposition :

**Proposition 4.23** Soit  $n \geq 2$ ,  $p \in \{0, 1\}$ .

Soit  $B_0$ , une petite boule fermée de  $(\mathbb{R}_+^*)^K$ , de centre  $(1, \dots, 1)$ , non réduite au point  $(1, \dots, 1)$ .

Il existe un difféomorphisme  $\Phi_0$  sur  $B_0$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}_+^*)^K$  qui vérifie

$\Phi_0(1, \dots, 1) = (\mu_1, \dots, \mu_K)$  ; il existe d'autre part un réel  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\epsilon \leq \epsilon_0$  et tout  $\xi \in B_0$ , il existe un domaine  $\Omega_{p,\mu,\xi,\epsilon}$  à bord lisse et difféomorphe à  $\Omega$ , tel que :

– L'application

$$\begin{aligned} B_0 &\longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^K \\ \xi &\longmapsto (\mu_{1,p}(\Omega_{p,\mu,\xi,\epsilon}), \dots, \mu_{K,p}(\Omega_{p,\mu,\xi,\epsilon})) \end{aligned}$$

est continue.

– On a la convergence :

$$(\mu_{1,p}(\Omega_{p,\mu,\xi,\epsilon}), \dots, \mu_{K,p}(\Omega_{p,\mu,\xi,\epsilon})) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \Phi_0(\xi).$$

Ici,  $B_0$  devra être assez petit pour que les  $K$  premières valeurs propres non nulles d'une certaine matrice paramétrée par  $\xi$  donnent un difféomorphisme (par rapport à la variable  $\xi$ ).

**Preuve de la proposition 4.23.** Construisons  $\Omega_{0,\mu,\xi,\epsilon}$  : soit la matrice  $B(a, \kappa)$  donnée par le lemme 4.22 de spectre  $0 < \mu_{1,0} < \dots < \mu_{K,0}$ .

Soit  $K$  boules euclidiennes  $\Omega^1, \dots, \Omega^K$  de volumes respectifs  $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_K}$ . Notons  $r_i$ , les diamètres respectifs de ces boules. Sans suire à la généralité, on peut supposer que le bord de ces boules est euclidien sur un  $\epsilon_0$ -voisinage d'un point (où  $\epsilon_0$  est une constante positive non nulle) ; cela permettra de recoller les domaines de façon lisse.

Pour tout  $i \in \{1, \dots, K\}$ , soit  $\Omega^i(\xi_i)$ , l'image de  $\Omega^i$  par l'homothétie de rapport  $\xi_i$ . Soit

alors un domaine de volume 1, difféomorphe à  $\Omega$ , dont le bord contient un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-1}$  de diamètre plus grand que  $2(r_1 + \dots + r_K)$  (cf figure 10). On notera encore  $\Omega$  ce domaine.

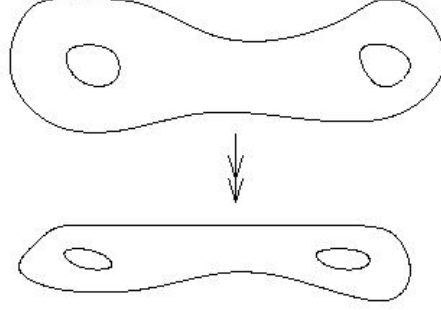


FIG. 10 – Déformation de  $\Omega$

Suivant la construction indiquée dans [A2], on relie de façon lisse chacune des boules  $\Omega_i(\xi_i)$  à  $\Omega$  par des  $\epsilon$ –anses (la liaison se faisant là où le bord est euclidien ; on suppose que  $\epsilon$  est inférieur à  $\epsilon_0$  pour que l’on puisse effectuer tous ces recollements). Rappelons que ces  $\epsilon$ –anses sont du type

$$A_i(\epsilon) = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \in ]-s_i, s_i[, \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} \leq \rho_i(x_n) \right\},$$

où  $\rho_i$  est une fonction lisse sur l’intervalle  $] -s_i, s_i[$  ( $s_i > 0$ ).

De plus, on choisit la fonction  $\rho_i$  de sorte que  $\int_{-s_i}^{s_i} \rho_i^{1-n}(t) dt = \kappa_{0,i}$  (où les réels  $\kappa_{0,i}$  sont donnés dans le lemme 4.22).

Notons  $\tilde{\Omega}_{0,\mu,\xi,\epsilon}$  le domaine ainsi obtenu, qui est bien difféomorphe à  $\Omega$  (cf figure 11).

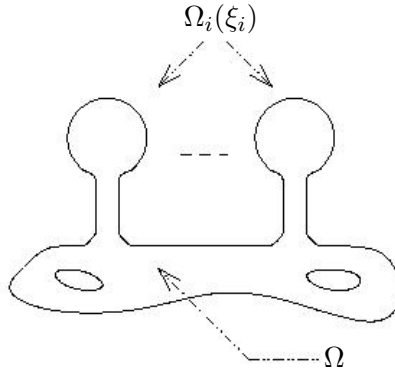


FIG. 11 – Construction de  $\tilde{\Omega}_{0,\mu,\xi,\epsilon}$

Soit alors  $\Omega_{0,\mu,\xi,\epsilon}$ , l’image de  $\tilde{\Omega}_{0,\mu,\xi,\epsilon}$  par l’homothétie de rapport  $\sqrt{\tau_{n-1}} \epsilon^{(n-1)/2}$ , où  $\tau_{n-1}$  est le volume de la sphère unité  $S^{n-1}$ .

Le résultat de [A2] permet alors d'affirmer que

$$(\mu_{1,0}(\Omega_{0,\mu,\xi,\epsilon}), \dots, \mu_{K,0}(\Omega_{0,\mu,\xi,\epsilon})) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \Phi_0(\xi),$$

où  $\Phi_0(\xi)$  est la suite des  $K$  premières valeurs propres non nulles de la matrice  $B(a(\xi), \kappa)$  (avec  $a(\xi)_i = (a_i/(\xi_i)^n)$ ).

Notons que si  $B_0$  est assez petite, l'application  $\xi \mapsto \Phi_0(\xi)$  est bien un difféomorphisme (le fait qu'il n'y ait pas de multiplicité est ici fondamental).

Enfin, si  $\xi = (1, \dots, 1)$ , on obtient le spectre de  $B(a, \kappa)$  qui, par construction, vaut  $(\mu_1, \dots, \mu_K)$ .

Nous avons ainsi construit notre domaine  $\Omega_{0,\mu,\xi,\epsilon}$ .

Maintenant une nouvelle application du lemme de McGowan montre que  $\tilde{\mu}_{1,2}(\tilde{\Omega}_{0,\mu,\xi,\epsilon})$  est minoré par une constante positive non nulle indépendante de  $\epsilon$  et  $\tilde{\mu}_{1,2}(\Omega_{0,\mu,\xi,\epsilon}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} +\infty$ . Ainsi les  $K$  premières valeurs propres non nulles pour les 1-formes de  $\Omega_{0,\mu,\xi,\epsilon}$  sont celles associées à des formes propres exactes ; elles proviennent donc des fonctions (A).

On peut donc choisir également  $\Omega_{1,\mu,\xi,\epsilon} = \Omega_{0,\mu,\xi,\epsilon}$  pour  $\epsilon$  assez petit. ■

On termine alors comme en section 4.1 par une application du lemme 4.21.

## 5 Cas des variétés riemanniennes compactes.

Le preuve du théorème 1.2 est mot pour mot la même que celle du théorème 1.1. Nous ne la referons donc pas.

Notons juste les modifications à apporter par rapport au cas euclidien :

### 1. Construction de la métrique $g_1$ .

La preuve est la même, compte tenu que l'on peut, de même que dans le cas euclidien, contrôler l'asymptotique des petites valeurs propres lorsqu'on relie des variétés riemanniennes par des anses (voir [A-C2] et [A2]).

De plus, les homothéties sur les domaines sont remplacées par des homothéties sur la métrique.

Lorsque la dimension vaut 2, les petites valeurs propres que l'on obtient pour les fonctions en reliant des variétés par des anses de petit rayon se retrouvent (via l'opérateur de Hodge) au niveau des 2-formes. On prescrit donc le spectre des 1-formes avec multiplicité 2 dans ce cas. En revanche, si la dimension vaut au moins 3, on contrôle comme dans le cas des domaines, grâce au lemme de McGowan, le spectre des 2-formes exactes.

### 2. Construction de la métrique $g_2$ .

- On utilise le théorème 2.3 au lieu de 2.1 (généralisation dans le cas compact des haltères de Cheeger).
- Les homothéties sur les domaines sont encore remplacées par des homothéties sur la métrique.
- Le théorème 3.1 est remplacé par le résultat de [Ge-P].

- Dans la preuve de l'équivalent du lemme 4.15, on n'utilise pas le théorème 2.11 mais simplement le fait que l'on peut contrôler le spectre des  $p$ –formes exactes absolues du produit d'un intervalle par une petite boule euclidienne.

**Remarque 5.1** *Par l'inégalité de Weinberger (voir [W]), nous ne pouvons pas prescrire le volume en même temps que le spectre dans le cas des fonctions et des 1–formes qui vérifient les CB (A) sur les domaines euclidiens.*

*En revanche, le résultat de [C-D] montre qu'il n'y a pas d'obstruction à prescrire le volume lorsqu'on prescrit le spectre des fonctions sur les variétés compactes. Un tel travail a été fait par Lohkamp dans [L].*

## Annexes.

### A Le lemme de McGowan.

Il s'agit d'un résultat démontré par McGowan dans le cas des 2–formes différentielles exactes d'une variété compacte (voir [MG], lemme 2.3) et qui se généralise aux  $p$ –formes différentielles,  $p \geq 2$  (voir [Ge-P], lemme 1).

Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne compacte et  $(U_1, U_2)$  est un recouvrement de cette variété par deux ouverts, on minore la  $N^{\text{ie}}$  valeur propre de  $(M, g)$  pour les  $p$ –formes exactes en fonction des premières valeurs propres pour les  $p$ –formes exactes (avec CB (A)) des ouverts  $U_1, U_2$  et des premières valeurs propres pour les  $(p-1)$ –formes exactes (avec CB (A)) de l'ouvert  $U_1 \cap U_2$ . L'entier  $N$  est égal à  $1 + \dim H^{p-1}(U_1 \cap U_2)$ .

Plus précisément, il existe trois constantes  $a, b, c > 0$  telles que

$$\tilde{\nu}_{N,p}(M, g) \geq \frac{a}{\left( \frac{1}{\tilde{\mu}_{1,p}(U_1)} + \frac{1}{\tilde{\mu}_{1,p}(U_2)} \right) \left( b + \frac{c}{\tilde{\mu}_{1,p-1}(U_1 \cap U_2)} \right)}.$$

En particulier, si la cohomologie absolue en degré  $p-1$  de l'intersection est nulle, on minore la première valeur propre des  $p$ –formes exactes.

Notons que ce lemme se généralise à un recouvrement par un nombre quelconque (fini) d'ouverts, au moins lorsque l'ordre des intersections n'est pas plus grand que 2. De plus il reste valable pour les variétés à bord, dans le cas des CB (A).

**Remarque A.1** *Dans la preuve du lemme intervient une partition de l'unité dont on a besoin de contrôler le gradient en norme  $L^\infty$ . La constante  $c$  de la minoration donnée plus haut devient grande si ce gradient est grand. En fait, le lemme de McGowan ne donne des estimées non triviales que si les valeurs propres exactes des ouverts  $U_\alpha \cap U_\beta$  sont du même ordre de grandeur que leur diamètre. C'est le cas dans tout cet article.*

### B Indications sur le lissage des ouverts.

La réunion de deux domaines d'intersection non vide est un ouvert dont le bord n'est pas, en général, une sous variété lisse de  $\mathbb{R}^n$ .

L'exemple qui s'offre souvent à nous dans cet article consiste en un domaine de  $\mathbb{R}^n$  auquel on rajoute un domaine de bord cylindrique (produit d'un intervalle par une boule de codimension 1).

Il est toutefois possible de lisser le bord de ces domaines. L'idée consiste à déformer le bord du domaine initial au voisinage d'un point afin de rendre nulles toutes les courbures principales (voir figure 12).

On n'a plus alors qu'à recoller le cylindre, après l'avoir "évasé" à l'une de ses extrémités et "arondi" à l'autre ; voir figure 13.

Il est également possible de lisser un cylindre seul : voir figure 14.

Nous ne ferons pas tout cela en détails dans cet articles. Toutes les constructions sont expliquées dans l'appendice de [G1].

Cette méthode fournit également le lissage des haltères de Cheeger compactes (qui sont le bord de domaines euclidiens).

Dans le cas général des variétés riemanniennes abstraites, on recolle un cylindre à la variété en excisant une boule et en modifiant la métrique au voisinage du bord de la boule excisée (afin d'obtenir la métrique produit d'un intervalle avec une sphère de codimension 1).

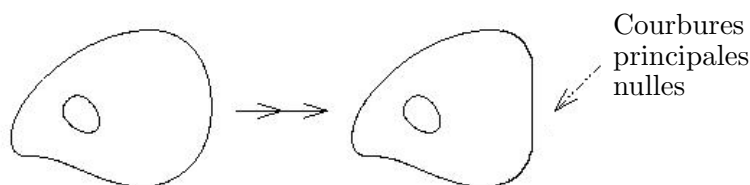


FIG. 12 – Déformation du bord

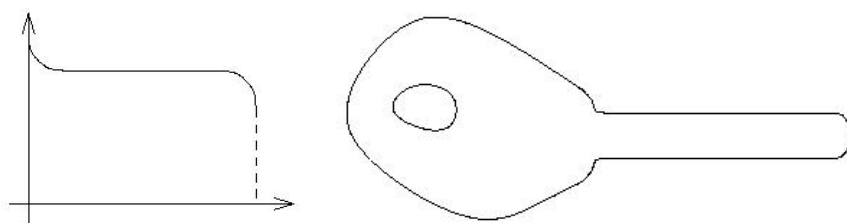


FIG. 13 – Fonction dont toutes les dérivées sont infinies au bord de l'intervalle de définition. Le rayon du cylindre recollé varie en fonction du point correspondant sur l'axe, suivant cette fonction. On en déduit le recollement du cylindre.

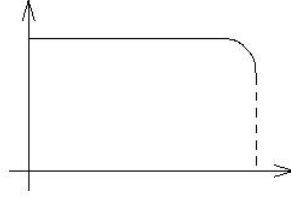


FIG. 14 – Lissage d'un cylindre

**Remerciements.** L'auteur tient à remercier Monsieur le Professeur Bruno Colbois<sup>1</sup> pour l'aide et le soutien apportés lors de la rédaction de cet article.

## Références

- [A1] C. Anné. *Spectre du Laplacien et écrasement d'anses*. Ann. Sci. École Norm. Sup., **20** (1987), 271-280.
- [A2] C. Anné. *A note on the generalized Dumbbell problem*. Proc. Am. Math. Soc. **123**, 8, 2595-2599 (1995).
- [A-C1] C. Anné, B. Colbois. *Opérateur de Hodge-Laplace sur les variétés compactes privées d'un nombre fini de boules*. Jour. of Functional Analysis, **115**, 1, (1993).
- [A-C2] C. Anné, B. Colbois. *Spectre du Laplacien agissant sur les  $p$ -formes différentielles et écrasement d'anses*. Math. Ann. 303, **3**, (1995), 545-573.
- [AB] M.S. Ashbaugh, R.D. Benguria. *Proof of the Payne-Pólya-Weinberger conjecture*. Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 25, No.1, 19-29 (1991).
- [Be] P. Bérard. *Spectral Geometry : Direct and Inverse Problem*. Lecture Notes in Maths. **1207**, Springer, Berlin-Heidelberg (1986).
- [Che1] J. Cheeger. *On the Hodge Theory of Riemannian Manifolds*, dans *Geometry of the Laplace Operator*. R. Osserman & A. Weinstein, eds. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **36**, (1980), 91-146.
- [Che2] J. Cheeger *Spectral Geometry of Riemannian Singular Spaces*. J. Diff. Geom. **18**(1983), 575-657.
- [C-D] B. Colbois, J. Dodziuk. *Riemannian metrics with large  $\lambda_1$* . Proc. Amer. Math. Soc. 122, no 3 (1994).
- [CV1] Y. Colin de Verdière. *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4<sup>e</sup> série, t. 20, (1987), 599-615.
- [CV2] Y. Colin de Verdière. *Spectres de Graphes*. Livre publié par la Soc. Math. de France, 1998
- [Cou] G. Courtois. *Comportement du spectre d'une variété riemannienne compacte sous perturbation topologique par excision d'un domaine*. Thèse, Institut Fourier, Grenoble, 1987.

---

<sup>1</sup>de l'Université de Neuchâtel, Suisse

- [D1] J. Dodziuk. *Eigenvalues of the Laplacian on forms*. Proc Amer. math. Society, **85**, 3 (1982).
- [D2] J. Dodziuk. Appendix of "*Eigenvalues in Riemannian Geometry*". Chavel, Academic Press, Orlando (1984).
- [D-MG] J. Dodziuk, J-K Mc Gowan. *The spectrum of the Hodge Laplacian for a degenerating family of hyperbolic three manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc., 347 (1995), 1981-1995.
- [Ga-H-L] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Second Edition Springer Verlag (1993).
- [G1] P. Guerini. *Spectre du Laplacien agissant sur les Formes Différentielles d'un Domaine Euclidien*. Thèse de doctorat, Université de Savoie (2001).
- [G2] P. Guerini. *Spectre du Laplacien de Hodge-de Rham : Estimées sur les Variétés Convexes*.
- [Ge-P] G. Gentile, V. Pagliara. *Riemannian metrics with large first eigenvalue on forms of degree  $p$* . Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), no 12, 3855-3858.
- [L] J. Lohkamp. *Discontinuity of geometric expansions*. Comment. Math. Helvetici 71 (1996) 213-228.
- [MG] J.K. Mc Gowan. *The  $p$ -spectrum of the Laplacian on compact hyperbolic three manifolds*. [J] Math. Ann. **297**, 4, 725-745, (1993).
- [P-P-W] L. Payne, G. Pólya, H. Weinberger. *On the Ratio of Consecutive Eigenvalues*. J. of Math. and Phys., vol 35, (1956), 289-298.
- [T] M. E. Taylor. *Partial Differential Equations*. Basic Theory (Vol 1) (1996), Texts in applied Mathematics, Springer.
- [W] H.F. Weinberger. *An isoperimetric inequality for the  $n$ -dimensional free membrane problem*. J. Rational Mech. Anal. **5** (1956) 633-636.